

$$\alpha) \text{ Αν } \boxed{f(x_1) = f(x_2)} \Rightarrow (f \circ g)(f(x_1)) = (f \circ g)(f(x_2)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (f \circ g \circ f)(x_1) = (f \circ g \circ f)(x_2) \xrightarrow{(f \circ g \circ f)(x) = x} \boxed{x_1 = x_2}$$

Άρα η f είναι 1-1 και άρα είναι αντιστρέψιμη

β) Για κάθε $x \in R$ είναι

$$(f \circ g \circ f)(x) = x \Rightarrow f^{-1}((f \circ g \circ f)(x)) = f^{-1}(x) \Rightarrow (f^{-1} \circ f \circ g \circ f)(x) = f^{-1}(x)$$

$$\xrightarrow{(f \circ f^{-1})(x) = x} (g \circ f)(x) = f^{-1}(x) \quad (1)$$

Ακόμη

$$(f \circ g \circ f)(x) = x \xrightarrow{\text{θέτουμε όπου } x \text{ το } f^{-1}(x)} (f \circ g \circ f)(f^{-1}(x)) = f^{-1}(x)$$

$$\Rightarrow (f \circ g \circ f \circ f^{-1})(x) = f^{-1}(x) \xrightarrow{(f \circ f^{-1})(x) = x} \Rightarrow (f \circ g)(x) = f^{-1}(x) \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow \boxed{(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)}$$

$$\alpha) \text{ Αν } \boxed{f(x_1) = f(x_2)} \Rightarrow g^{-1}(f(x_1)) = g^{-1}(f(x_2)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(g^{-1}(f(x_1))) = f(g^{-1}(f(x_2))) \xrightarrow{(f \circ g^{-1} \circ f)(x) = x} \boxed{x_1 = x_2}$$

Άρα η f είναι 1-1 και άρα είναι αντιστρέψιμη

β) Για κάθε $x \in R$ είναι

$$(f \circ g^{-1} \circ f)(x) = x \Rightarrow f(g^{-1}(f(x))) = x \xrightarrow{\text{θέτουμε όπου } x \text{ το } f^{-1}(x)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(g^{-1}(f(f^{-1}(x)))) = f^{-1}(x) \Rightarrow f(g^{-1}(x)) = f^{-1}(x) \xrightarrow{\text{θέτουμε όπου } x \text{ το } g(x)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(g^{-1}(g(x))) = f^{-1}(g(x)) \Rightarrow f(x) = f^{-1}(g(x)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(f(x)) = f(f^{-1}(g(x))) \Rightarrow \boxed{f(f(x)) = g(x)}$$

Άρα $f \circ f = g$

γ) Έχουμε

$$f(f(x)) = g(x) \Rightarrow f(f(f(x))) = f(g(x)) \quad (1)$$

Ακόμη

$$f(f(x)) = g(x) \xrightarrow{\text{θέτουμε όπου } x \text{ το } f(x)} f(f(f(x))) = g(f(x)) \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow \boxed{f(g(x)) = g(f(x))}$$

Άρα $f \circ g = g \circ f$