

4.15 1)

α) Επειδή η γραφική παράσταση της f διέρχεται από τα σημεία $O(0,0)$ και $A(1,1)$

θα είναι $f(0)=0$ και $f(1)=1$. Έστω ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα. Τότε

$$0 < 1 \stackrel{f \searrow}{\Rightarrow} f(0) > f(1) \Rightarrow 0 > 1 \quad \underline{\text{άτοπο}}$$

Οπότε η f δεν είναι γνησίως φθίνουσα, και επειδή είναι γνησίως μονότονη, υποχρεωτικά θα είναι γνησίως αύξουσα

β) Επειδή η f είναι γνησίως μονότονη θα είναι και $1-1$ άρα αντιστρέψιμη. Οπότε

$$\begin{aligned} f(f^{-1}(x) + x^2) &= f(f^{-1}(x) + x + 2) \stackrel{f(1)=1}{\Rightarrow} \cancel{f^{-1}(x)} + x^2 = \cancel{f^{-1}(x)} + x + 2 \Rightarrow \\ \Rightarrow x^2 &= x + 2 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow \Delta = 9 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{1 \pm 3}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1+3}{2} \Rightarrow \boxed{x_1 = 2} \\ x_2 = \frac{1-3}{2} \Rightarrow \boxed{x_2 = -1} \end{cases} \end{aligned}$$

γ) Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα έχουμε

$$\begin{aligned} f^{-1}(1 + f(x)) &\stackrel{f \nearrow}{>} 1 \Rightarrow f(f^{-1}(1 + f(x))) > f(1) \stackrel{f(1)=1}{\Rightarrow} \cancel{1} + f(x) > \cancel{1} \Rightarrow \\ \Rightarrow f(x) &> 0 \stackrel{f(0)=0}{\Rightarrow} f(x) > f(0) \stackrel{f \nearrow}{\Rightarrow} \boxed{x > 0} \end{aligned}$$

4.15 2)

α) Επειδή η γραφική παράσταση της f διέρχεται από τα σημεία $A(3,2)$ και

$B(5,9)$, θα είναι $f(3)=2$ και $f(5)=9$. Ακόμη επειδή η f είναι γνησίως μονότονη θα είναι και $1-1$ άρα αντιστρέψιμη. Οπότε

$$\begin{aligned} f(2 + f^{-1}(x^2 + x)) &= 9 \Rightarrow f^{-1}(f(2 + f^{-1}(x^2 + x))) = f^{-1}(9) \stackrel{f(5)=9 \Rightarrow f^{-1}(9)=5}{\Rightarrow} \\ \Rightarrow 2 + f^{-1}(x^2 + x) &= 5 \Rightarrow f^{-1}(x^2 + x) = 5 - 2 \Rightarrow f^{-1}(x^2 + x) = 3 \Rightarrow \\ \Rightarrow f(f^{-1}(x^2 + x)) &= f(3) \stackrel{f(3)=2}{\Rightarrow} x^2 + x = 2 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \Delta = 9 \Rightarrow x_{1,2} &= \frac{-1 \pm 3}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-1+3}{2} \Rightarrow \boxed{x_1 = 1} \\ x_2 = \frac{-1-3}{2} \Rightarrow \boxed{x_2 = -2} \end{cases} \end{aligned}$$

β) Έστω ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα. Τότε $3 < 5 \stackrel{f \searrow}{\Rightarrow} f(3) > f(5) \Rightarrow 2 > 9$ άτοπο

Οπότε η f δεν είναι γνησίως φθίνουσα, και επειδή είναι γνησίως μονότονη, υποχρεωτικά θα είναι γνησίως αύξουσα

$$\begin{aligned} f(f^{-1}(x^2 - 8x) - 2) &< 2 \stackrel{f(3)=2}{\Rightarrow} f(f^{-1}(x^2 - 8x) - 2) < f(3) \stackrel{f \nearrow}{\Rightarrow} f^{-1}(x^2 - 8x) - 2 < 3 \Rightarrow \\ \Rightarrow f^{-1}(x^2 - 8x) &< 3 + 2 \Rightarrow f^{-1}(x^2 - 8x) < 5 \Rightarrow f(f^{-1}(x^2 - 8x)) < f(5) \\ \Rightarrow x^2 - 8x - 9 &< 0 \end{aligned}$$

$$\Delta = 100 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{8 \pm 10}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{8+10}{2} \Rightarrow x_1 = 9 \\ x_2 = \frac{8-10}{2} \Rightarrow x_2 = -1 \end{cases}$$

Τα πρόσημα του τριωνύμου φαίνονται παρακάτω

x	$-\infty$	-1	7	$+\infty$	
x^2-8x-9	+	0	-	0	+

Οπότε $x^2 - 8x - 9 < 0 \Rightarrow \boxed{-1 < x < 9}$