

4.14 1)

- α) Έστω $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ με $x_1 < x_2$ (1). Τότε επειδή η $\ln x$ είναι γνησίως αύξουσα θα ισχύει $\ln x_1 < \ln x_2$ (2)

Προσθέτουμε τις (1) και (2) κατά μέλη και έχουμε

$$x_1 + \ln x_1 < x_2 + \ln x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα και γνησίως μονότονη

- β) Η f είναι γνησίως μονότονη, άρα 1-1, άρα και αντιστρέψιμη. Έχουμε

$$f^{-1}(x) = 2 \Rightarrow f(f^{-1}(x)) = f(2) \xRightarrow{f(f^{-1}(x))=x, f(2)=2+\ln 2} x = 2 + \ln 2$$

- γ) Έχουμε

$$f^{-1}(x+1) > x \xRightarrow{f \nearrow} f(f^{-1}(x+1)) > f(x) \xRightarrow{f(f^{-1}(x+1))=x+1} x+1 > x + \ln x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln x < 1 \Rightarrow \ln x < \ln e \Rightarrow x < e$$

Και επειδή $x \in (0, +\infty)$ θα είναι $0 < x < e$

4.14 2)

- α) Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ (1). Τότε

$$x_1 < x_2 \Rightarrow -x_1 > -x_2 \xRightarrow{e^x \nearrow} e^{-x_1} > e^{-x_2} \Rightarrow -e^{-x_1} < -e^{-x_2} \quad (2)$$

Προσθέτουμε τις (1) και (2) κατά μέλη και έχουμε

$$x_1 - e^{x_1} < x_2 - e^{x_2} \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα και γνησίως μονότονη

- β) Η f είναι γνησίως μονότονη, άρα 1-1, άρα και αντιστρέψιμη. Έχουμε

$$f^{-1}(x+1) = 0 \Rightarrow f(f^{-1}(x+1)) = f(0) \xRightarrow{f(f^{-1}(x+1))=x+1, f(0)=0-1=-1} x+1 = -1 \Rightarrow x = -2$$

- γ) Καταρχήν πρέπει $x > 0$. Έχουμε

$$f^{-1}(\ln x) > 0 \xRightarrow{f \nearrow} f(f^{-1}(\ln x)) > f(0) \xRightarrow{f(f^{-1}(\ln x))=\ln x, f(0)=-1} \ln x > -1 \Rightarrow \ln x > \ln e^{-1} \Rightarrow x > \frac{1}{e} \text{ το}$$

οποίο ικανοποιεί και τον περιορισμό $x > 0$

4.14 3)

- α) Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ (1). Τότε

$$x_1 < x_2 \Rightarrow e^{x_1} < e^{x_2} \Rightarrow e^{x_1} + 1 < e^{x_2} + 1 \Rightarrow \ln(e^{x_1} + 1) < \ln(e^{x_2} + 1) \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα και γνησίως μονότονη

- β) Η f είναι γνησίως μονότονη, άρα 1-1, άρα και αντιστρέψιμη. Ψάχνουμε τον αριθμό $x = f^{-1}(\ln 5)$. Έχουμε

$$x = f^{-1}(\ln 5) \Rightarrow f(x) = f(f^{-1}(\ln 5)) \Rightarrow f(x) = \ln 5 \Rightarrow \ln(e^x + 1) = \ln 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^x + 1 = 5 \Rightarrow e^x = 5 - 1 \Rightarrow e^x = 4 \Rightarrow x = \ln 4$$

- γ) Καταρχήν η f έχει πεδίο ορισμού όλο το $\mathbb{R}$. Έχουμε παρόμοια με το β) ότι αν

$$x = f^{-1}(\ln 3) \text{ τότε}$$

$$x = f^{-1}(\ln 3) \Rightarrow f(x) = f(f^{-1}(\ln 3)) \Rightarrow f(x) = \ln 3 \Rightarrow \ln(e^x + 1) = \ln 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^x + 1 = 3 \Rightarrow e^x = 3 - 1 \Rightarrow e^x = 2 \Rightarrow x = \ln 2 \Rightarrow f^{-1}(\ln 3) = \ln 2 \quad (1)$$

Οπότε

$$f(x) > f^{-1}(\ln 3) \stackrel{(1)}{\Rightarrow} f(x) > \ln 2 \Rightarrow \ln(e^x + 1) > \ln 2 \stackrel{\ln \nearrow}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow e^x + 1 > 2 \Rightarrow e^x > 1 \Rightarrow e^x > e^0 \Rightarrow \boxed{x > 0}$$

4.14 4)

α) Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $\boxed{x_1 < x_2}$. Τότε

$$x_1 < x_2 \stackrel{\text{υψώνουμε σε περιττή δύναμη}}{\Rightarrow} x_1^3 < x_2^3 \quad (1)$$

$$x_1 < x_2 \quad (2)$$

Προσθέτοντας τις (1) και (2) κατά μέλη έχουμε

$$x_1^3 + x_1 < x_2^3 + x_2 \stackrel{\text{αφαιρούμε 8}}{\Rightarrow} x_1^3 + x_1 - 8 < x_2^3 + x_2 - 8 \Rightarrow \boxed{f(x_1) < f(x_2)}$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα

β) Ψάχνουμε τον αριθμό $x = f^{-1}(-8)$. Έχουμε

$$x = f^{-1}(-8) \Rightarrow f(x) = f(f^{-1}(-8)) \Rightarrow x^3 + x - 8 = -8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^3 + x = 0 \Rightarrow x(x^2 + 1) = 0 \stackrel{x^2 + 1 \neq 0}{\Rightarrow} \boxed{x = 0}$$

γ) Η f είναι γνησίως μονότονη άρα και 1-1. Οπότε

$$f(2x^3 + 2) = f(5x^2 - x) \stackrel{f:1-1}{\Rightarrow} 2x^3 + 2 = 5x^2 - x \Rightarrow 2x^3 - 5x^2 + x + 2 = 0 \quad \begin{matrix} \text{ρίζα το } x=1 \\ \text{παράγοντοποίηση με Homer} \end{matrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x-1)(x-2)(2x+1) = 0 \Rightarrow \boxed{x=1 \text{ ή } x=2 \text{ ή } x=-\frac{1}{2}}$$

δ) Καταρχήν η f έχει πεδίο ορισμού όλο το $\mathbb{R}$. Έχουμε

$$f^{-1}(e^{2x-6} + 1) > 2 \stackrel{f \nearrow}{\Rightarrow} f(f^{-1}(e^{2x-6} + 1)) > f(2) \stackrel{f(2)=2^3+2-8=2}{\Rightarrow} e^{2x-6} + 1 > 2 \Rightarrow e^{2x-6} > 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^{2x-6} > e^0 \Rightarrow 2x - 6 > 0 \Rightarrow 2x > 6 \Rightarrow \boxed{x > 3}$$