

4.13 1)

$$\alpha) \text{ Av } \boxed{f(x_1) = f(x_2)} \Rightarrow f(f(x_1)) = f(f(x_2)) \stackrel{(f \circ f)(x) = x + f(x)}{\Rightarrow} \\ \Rightarrow x_1 + f(x_1) = x_2 + f(x_2) \stackrel{f(x_1) = f(x_2)}{\Rightarrow} \boxed{x_1 = x_2}$$

Άρα η f είναι 1-1

$$\beta) (f \circ f)(x) = x + f(x) \stackrel{\text{θέτουμε όπου } x \text{ το } 0}{\Rightarrow} f(f(0)) = 0 + f(0) \Rightarrow f(f(0)) = f(0) \stackrel{f:1-1}{\Rightarrow} \\ \Rightarrow \boxed{f(0) = 0}$$

$$\gamma) (f \circ f)(x) = x + f(x) \stackrel{\text{θέτουμε όπου } x \text{ το } f^{-1}(x)}{\Rightarrow} f(f(f^{-1}(x))) = f^{-1}(x) + f(f^{-1}(x)) \\ \stackrel{f(f^{-1}(x)) = x}{\Rightarrow} \boxed{f(x) = f^{-1}(x) + x}, \text{ για κάθε } x \in f(R)$$

4.13 2)

$$\alpha) \text{ Av } \boxed{f(x_1) = f(x_2)} \Rightarrow f(f(x_1)) = f(f(x_2)) \stackrel{(f \circ f)(x) = -x}{\Rightarrow} -x_1 = -x_2 \Rightarrow \boxed{x_1 = x_2}$$

Άρα η f είναι 1-1

$$\beta) (f \circ f)(x) = -x \stackrel{\text{θέτουμε όπου } x \text{ το } f^{-1}(x)}{\Rightarrow} f(f(f^{-1}(x))) = -f^{-1}(x) \stackrel{f(f^{-1}(x)) = x}{\Rightarrow} \\ \Rightarrow \boxed{f(x) = -f^{-1}(x)}, \text{ για κάθε } x \in R$$

$$\gamma) (f \circ f)(x) = -x \Rightarrow f(f(x)) = -x \Rightarrow f^{-1}[f(f(x))] = f^{-1}(-x) \Rightarrow \\ \Rightarrow f(x) = f^{-1}(-x) \stackrel{f^{-1}(x) = -f(x) \Rightarrow f(x) = -f^{-1}(x)}{\Rightarrow} \boxed{-f^{-1}(x) = f^{-1}(-x)}$$

Άρα η f^{-1} είναι περιττή

4.13 3)

$$\alpha) \text{ Av } \boxed{f(x_1) = f(x_2)} \Rightarrow f(f(x_1)) = f(f(x_2)) \stackrel{(f \circ f)(x) = x \cdot f(x)}{\Rightarrow} \\ \Rightarrow x_1 \cdot f(x_1) = x_2 \cdot f(x_2) \stackrel{f(x_1) = f(x_2) \neq 0 \text{ (αφού } f(x) > 0)}{\Rightarrow} \boxed{x_1 = x_2}$$

Άρα η f είναι 1-1 και συνεπώς αντιστρέφεται

$$\beta) (f \circ f = 1)(x) = x \cdot f(x) \stackrel{\text{θέτουμε όπου } x \text{ το } 1}{\Rightarrow} f(f(1)) = 1 \cdot f(1) \Rightarrow f(f(1)) = f(1) \stackrel{f:1-1}{\Rightarrow} \boxed{f(1) = 1}$$

4.13 4)

$$\alpha) \text{ Av } \boxed{f(x_1) = f(x_2)} \Rightarrow f(f(x_1)) = f(f(x_2)) \stackrel{f(f(x)) = e^x + f^3(x)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow e^{x_1} + f^3(x_1) = e^{x_2} + f^3(x_2) \Rightarrow \overset{f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow f^3(x_1)=f^3(x_2)}{\Rightarrow} \Rightarrow e^{x_1} = e^{x_2} \Rightarrow \boxed{x_1 = x_2}$$

Άρα η f είναι 1-1

$$\begin{aligned} \beta) \quad f(f(x)) &= e^x + f^3(x) \xRightarrow{\text{θέτουμε όπου } x \text{ το } f^{-1}(x)} f(f(f^{-1}(x))) = e^{f^{-1}(x)} + f^3(f^{-1}(x)) \xRightarrow{f(f^{-1}(x))=x} \\ &\Rightarrow f(x) = e^{f^{-1}(x)} + x^3 \Rightarrow e^{f^{-1}(x)} = f(x) - x^3 \Rightarrow \ln e^{f^{-1}(x)} = \ln[f(x) - x^3] \\ &\Rightarrow \boxed{f^{-1}(x) = \ln[f(x) - x^3]} \end{aligned}$$

4.13 5)

$$\alpha) \quad \text{Αν } \boxed{f(x_1) = f(x_2)} \Rightarrow f(f(x_1)) = f(f(x_2)) \xRightarrow{f(f(x))=x-1} x_1 - 1 = x_2 - 1 \Rightarrow \boxed{x_1 = x_2}$$

Άρα η f είναι 1-1

$$\begin{aligned} \beta) \quad f(f(x)) &= x - 1 \xRightarrow{\text{θέτουμε όπου } x \text{ το } f^{-1}(x)} f(f(f^{-1}(x))) = f^{-1}(x) - 1 \xRightarrow{f(f^{-1}(x))=x} \\ &\Rightarrow f(x) = f^{-1}(x) - 1 \Rightarrow \boxed{f^{-1}(x) = f(x) + 1} \end{aligned}$$

γ) Έστω ότι η C_f έχει ένα κοινό σημείο με την ευθεία $y = x$ το $A(x_0, x_0)$. Τότε προφανώς θα ισχύει

$$f(x_0) = x_0 \quad (1) \quad \text{και} \quad f^{-1}(x_0) = x_0 \quad (2)$$

Τότε όμως

$$f^{-1}(x) = 1 + f(x) \xRightarrow{\text{θέτουμε όπου } x \text{ το } x_0} f^{-1}(x_0) = 1 + f(x_0) \xRightarrow{(1), (2)} \cancel{x_0} = 1 + \cancel{x_0} \Rightarrow 0 = 1$$

άτοπο

Άρα η C_f δεν έχει κοινά σημεία με την ευθεία $y = x$