

Παρατηρούμε ότι το $\boxed{x=0}$ είναι μία **προφανής ρίζα** της εξίσωσης

Υποθέτουμε ότι η εξίσωση έχει και άλλη ρίζα έστω την x_1 . Τότε θα ισχύει

$$f(x_1)f(2x_1)f(3x_1) = f^3(4x_1) \quad (1) \text{ . Όμως}$$

Αν $x_1 > 0$ τότε

$$\left. \begin{array}{l} x_1 < 4x_1 \xRightarrow{f'} f(x_1) < f(4x_1) \\ 2x_1 < 4x_1 \xRightarrow{f'} f(2x_1) < f(4x_1) \\ 3x_1 < 4x_1 \xRightarrow{f'} f(3x_1) < f(4x_1) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη} \\ \text{όλα τα μέλη είναι θετικά αφού } f: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty) \end{array} \Rightarrow f(x_1)f(2x_1)f(3x_1) < f^3(4x_1) \stackrel{(1)}{\Rightarrow}$$

$$f^3(4x_1) < f^3(4x_1) \quad \text{άτοπο}$$

Ομοίως αν $x_1 < 0$ τότε

$$\left. \begin{array}{l} x_1 > 4x_1 \xRightarrow{f'} f(x_1) > f(4x_1) \\ 2x_1 > 4x_1 \xRightarrow{f'} f(2x_1) > f(4x_1) \\ 3x_1 > 4x_1 \xRightarrow{f'} f(3x_1) > f(4x_1) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη} \\ \text{όλα τα μέλη είναι θετικά αφού } f: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty) \end{array} \Rightarrow f(x_1)f(2x_1)f(3x_1) > f^3(4x_1) \stackrel{(1)}{\Rightarrow}$$

$$f^3(4x_1) > f^3(4x_1) \quad \text{άτοπο}$$

Άρα η εξίσωση έχει μοναδική ρίζα την $\boxed{x=0}$