

3.8 1)

Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$. Τότε

$$x_1 < x_2 \xrightarrow{f} f(x_1) < f(x_2) \quad (1)$$

$$x_1 < x_2 \xrightarrow{g} g(x_1) < g(x_2) \quad (2)$$

Προσθέτοντας τις (1) και (2) κατά μέλη έχουμε

$$f(x_1) + g(x_1) < f(x_2) + g(x_2) \Rightarrow (f+g)(x_1) < (f+g)(x_2)$$

Άρα η $f+g$ είναι γνησίως αύξουσα

3.8 2)

Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$. Τότε

$$x_1 < x_2 \xrightarrow{f} f(x_1) < f(x_2) \xrightarrow{\text{πολλαπλασιάζουμε με 3}} 3f(x_1) < 3f(x_2) \quad (1)$$

$$x_1 < x_2 \xrightarrow{g} g(x_1) < g(x_2) \xrightarrow{\text{πολλαπλασιάζουμε με 2}} 2g(x_1) < 2g(x_2) \quad (2)$$

Προσθέτοντας τις (1) και (2) κατά μέλη έχουμε

$$3f(x_1) + 2g(x_1) < 3f(x_2) + 2g(x_2) \Rightarrow h(x_1) < h(x_2)$$

Άρα η h είναι γνησίως αύξουσα

3.8 3)

Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$. Τότε

$$x_1 < x_2 \xrightarrow{f} f(x_1) > f(x_2) \quad (1)$$

$$x_1 < x_2 \xrightarrow{g} g(x_1) > g(x_2) \quad (2)$$

Πολλαπλασιάζοντας τις (1) και (2) κατά μέλη (έχουν όλα τα μέλη τους θετικά) έχουμε

$$f(x_1) \cdot g(x_1) > f(x_2) \cdot g(x_2) \Rightarrow (f \cdot g)(x_1) > (f \cdot g)(x_2)$$

Άρα η $f \cdot g$ είναι γνησίως φθίνουσα

3.8 4)

Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$. Τότε

$$x_1 < x_2 \xrightarrow{f} f(x_1) > f(x_2) \xrightarrow{\text{πολλαπλασιάζουμε με } -1} -f(x_1) < -f(x_2) \quad (1)$$

$$x_1 < x_2 \xrightarrow{g} g(x_1) < g(x_2) \quad (2)$$

Πολλαπλασιάζοντας τις (1) και (2) κατά μέλη (έχουν όλα τα μέλη τους θετικά) έχουμε

$$-f(x_1) \cdot g(x_1) < -f(x_2) \cdot g(x_2) \Rightarrow (f \cdot g)(x_1) > (f \cdot g)(x_2)$$

Άρα η $f \cdot g$ είναι γνησίως φθίνουσα

3.8 5)

Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $\boxed{x_1 < x_2}$. Τότε

$$x_1 < x_2 \stackrel{f \searrow}{\Rightarrow} f(x_1) > f(x_2) \quad (1)$$

$$x_1 < x_2 \stackrel{g \nearrow}{\Rightarrow} g(x_1) < g(x_2) \stackrel{\text{θετικά μέλη}}{\Rightarrow} \frac{1}{g(x_1)} > \frac{1}{g(x_2)} \quad (2)$$

Πολλαπλασιάζοντας τις (1) και (2) κατά μέλη (έχουν όλα τα μέλη τους θετικά) έχουμε

$$\frac{f(x_1)}{g(x_1)} > \frac{f(x_2)}{g(x_2)} \Rightarrow \boxed{\left(\frac{f}{g}\right)(x_1) > \left(\frac{f}{g}\right)(x_2)}$$

Άρα η $\frac{f}{g}$ είναι γνησίως φθίνουσα