

3.6 1)

Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$. Τότε

$$x_1 < x_2 \xRightarrow{\text{πολλαπλασιάζουμε με 6}} 6x_1 < 6x_2 \quad (1)$$

$$x_1 < x_2 \xRightarrow{3^x \nearrow} 3^{x_1} < 3^{x_2} \quad (2)$$

Προσθέτοντας τις (1) και (2) κατά μέλη έχουμε

$$6x_1 + 3^{x_1} < 6x_2 + 3^{x_2} \xRightarrow{\text{προσθέτουμε 5}} 6x_1 + 3^{x_1} + 5 < 6x_2 + 3^{x_2} + 5 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα

3.6 2)

Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$. Τότε

$$x_1 < x_2 \xRightarrow{\text{πολλαπλασιάζουμε με 3}} 3x_1 < 3x_2 \quad (1)$$

$$x_1 < x_2 \xRightarrow{\ln x \nearrow} \ln x_1 < \ln x_2 \quad (2)$$

Προσθέτοντας τις (1) και (2) κατά μέλη έχουμε

$$3x_1 + \ln x_1 < 3x_2 + \ln x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα

3.6 3)

Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$. Τότε

$$x_1 < x_2 \xRightarrow{\text{πολλαπλασιάζουμε με 2}} 2x_1 < 2x_2 \quad (1)$$

$$x_1 < x_2 \xRightarrow{e^x \nearrow} e^{x_1} < e^{x_2} \quad (2)$$

Προσθέτοντας τις (1) και (2) κατά μέλη έχουμε

$$2x_1 + \ln x_1 < 2x_2 + \ln x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα

3.6 4)

Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$. Τότε

$$x_1 < x_2 \xRightarrow{\text{πολλαπλασιάζουμε με } -2} -2x_1 > -2x_2 \quad (1)$$

$$x_1 < x_2 \xRightarrow{\ln x \nearrow} \ln x_1 < \ln x_2 \xRightarrow{\text{πολλαπλασιάζουμε με } -1} -\ln x_1 > -\ln x_2 \quad (2)$$

Προσθέτοντας τις (1) και (2) κατά μέλη έχουμε

$$-2x_1 - \ln x_1 > -2x_2 - \ln x_2 \xRightarrow{\text{προσθέτουμε 1}} -2x_1 - \ln x_1 + 1 > -2x_2 - \ln x_2 + 1 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα

3.6 5)

Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$. Τότε

$$x_1 < x_2 \xRightarrow{\text{πολλαπλασιάζουμε με } -3} -3x_1 > -3x_2 \quad (1)$$

$$x_1 < x_2 \xRightarrow{e^{x_1} < e^{x_2} \text{ (αφαιρούμε με } -7)} -7e^{x_1} > -7e^{x_2} \quad (2)$$

Προσθέτοντας τις (1) και (2) κατά μέλη έχουμε

$$-3x_1 - 7e^{x_1} > -3x_2 - 7e^{x_2} \Rightarrow \boxed{f(x_1) > f(x_2)}$$

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα

3.6 6)

Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $\boxed{x_1 < x_2}$. Τότε

$$x_1 < x_2 \xRightarrow{\text{πολλαπλασιάζουμε με } -4} -4x_1 > -4x_2 \quad (1)$$

$$x_1 < x_2 \xRightarrow{\text{πολλαπλασιάζουμε με } -1} -x_1 > -x_2 \xRightarrow{e^{-x_1} > e^{-x_2}} e^{-x_1} > e^{-x_2} \quad (2)$$

Προσθέτοντας τις (1) και (2) κατά μέλη έχουμε

$$-4x_1 - e^{-x_1} > -4x_2 - e^{-x_2} \xRightarrow{\text{προσθέτουμε } 3} -4x_1 - e^{-x_1} + 3 > -4x_2 - e^{-x_2} + 3 \Rightarrow \boxed{f(x_1) > f(x_2)}$$

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα

3.6 7)

Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $\boxed{x_1 < x_2}$. Τότε

$$x_1 < x_2 \xRightarrow{\text{πολλαπλασιάζουμε με } -4} -4x_1 > -4x_2 \quad (1)$$

$$x_1 < x_2 \xRightarrow{\left(\frac{1}{5}\right)^{x_1} > \left(\frac{1}{5}\right)^{x_2}} \left(\frac{1}{5}\right)^{x_1} > \left(\frac{1}{5}\right)^{x_2} \quad (2)$$

Προσθέτοντας τις (1) και (2) κατά μέλη έχουμε

$$-4x_1 + \left(\frac{1}{5}\right)^{x_1} > -4x_2 + \left(\frac{1}{5}\right)^{x_2} \xRightarrow{\text{αφαιρούμε } 7} -4x_1 + \left(\frac{1}{5}\right)^{x_1} - 7 > -4x_2 + \left(\frac{1}{5}\right)^{x_2} - 7 \Rightarrow \boxed{f(x_1) > f(x_2)}$$

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα

3.6 8)

Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $\boxed{x_1 < x_2}$. Τότε

$$x_1 < x_2 \xRightarrow{\text{υψώνουμε σε περιττή δύναμη}} x_1^3 < x_2^3 \quad (1)$$

$$x_1 < x_2 \xRightarrow{\text{πολλαπλασιάζουμε με } 2} 2x_1 < 2x_2 \quad (2)$$

Προσθέτοντας τις (1) και (2) κατά μέλη έχουμε

$$x_1^3 + 2x_1 < x_2^3 + 2x_2 \xRightarrow{\text{αφαιρούμε } 4} x_1^3 + 2x_1 - 4 < x_2^3 + 2x_2 - 4 \Rightarrow \boxed{f(x_1) < f(x_2)}$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα

3.6 9)

Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $\boxed{x_1 < x_2}$. Τότε

$$x_1 < x_2 \xRightarrow{\text{υψώνουμε σε περιττή δύναμη}} x_1^5 < x_2^5 \quad (1)$$

$$x_1 < x_2 \xRightarrow{\text{υψώνουμε σε περιττή δύναμη}} x_1^3 < x_2^3 \xRightarrow{\text{πολλαπλασιάζουμε με } 3} 3x_1^3 < 3x_2^3 \quad (2)$$

$$x_1 < x_2 \xRightarrow{\text{πολλαπλασιάζουμε με 4}} 4x_1 < 4x_2 \quad (3)$$

Προσθέτοντας τις (1), (2) και (3) κατά μέλη έχουμε

$$x_1^5 + 3x_1^3 + 4x_1 < x_2^5 + 3x_2^3 + 4x_2 \xRightarrow{\text{αφαιρούμε 2}}$$

$$\Rightarrow x_1^5 + 3x_1^3 + 4x_1 - 2 < x_2^5 + 3x_2^3 + 4x_2 - 2 \Rightarrow \boxed{f(x_1) < f(x_2)}$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα

3.6 10)

Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $\boxed{x_1 < x_2}$. Τότε

$$x_1 < x_2 \xRightarrow{\text{υψώνουμε σε περιττή δύναμη}} x_1^3 < x_2^3 \xRightarrow{\text{πολλαπλασιάζουμε με 2}} 2x_1^3 < 2x_2^3 \quad (1)$$

$$x_1 < x_2 \xRightarrow{\text{πολλαπλασιάζουμε με 4}} 4x_1 < 4x_2 \xRightarrow{e^x \nearrow} e^{4x_1} < e^{4x_2} \xRightarrow{\text{πολλαπλασιάζουμε με 3}} 3e^{4x_1} < 3e^{4x_2} \quad (2)$$

$$x_1 < x_2 \quad (3)$$

Προσθέτοντας τις (1), (2) και (3) κατά μέλη έχουμε

$$2x_1^3 + 3e^{4x_1} + x_1 < 2x_2^3 + 3e^{4x_2} + x_2 \xRightarrow{\text{αφαιρούμε 1}}$$

$$\Rightarrow 2x_1^3 + 3e^{4x_1} + x_1 - 1 < 2x_2^3 + 3e^{4x_2} + x_2 - 1 \Rightarrow \boxed{f(x_1) < f(x_2)}$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα

3.6 11)

Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $\boxed{x_1 < x_2}$. Τότε

$$x_1 < x_2 \xRightarrow{\text{υψώνουμε σε περιττή δύναμη}} x_1^3 < x_2^3 \quad (1)$$

$$x_1 < x_2 \xRightarrow{\text{πολλαπλασιάζουμε με 2}} 2x_1 < 2x_2 \quad (2)$$

Προσθέτοντας τις (1) και (2) κατά μέλη έχουμε

$$x_1^3 + 2x_1 < x_2^3 + 2x_2 \xRightarrow{\text{αφαιρούμε 4}} x_1^3 + 2x_1 - 4 < x_2^3 + 2x_2 - 4 \Rightarrow \boxed{f(x_1) < f(x_2)}$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα

3.6 12)

Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $\boxed{x_1 < x_2}$. Τότε

$$x_1 < x_2 \quad (1)$$

$$x_1 < x_2 \xRightarrow{e^x \nearrow} e^{x_1} < e^{x_2} \quad (2)$$

Πολλαπλασιάζοντας τις (1) και (2) κατά μέλη (έχουν όλα τα μέλη τους θετικά) έχουμε

$$x_1 \cdot e^{x_1} < x_2 \cdot e^{x_2} \Rightarrow \boxed{f(x_1) < f(x_2)}$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα