

28.Δ1

α) Η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο $[α,β]$

είναι παραγωγίσιμη στο $(α,β)$

$g(α) = g(β)$ διότι

$$\alpha - \beta = \ln f(\beta) - \ln f(\alpha) \Rightarrow \alpha - \beta = \ln \frac{f(\beta)}{f(\alpha)} \Rightarrow e^{\alpha - \beta} = \frac{f(\beta)}{f(\alpha)} \Rightarrow \frac{e^\alpha}{e^\beta} = \frac{f(\beta)}{f(\alpha)} \Rightarrow \frac{e^\alpha}{e^\beta} = \frac{f(\beta)}{f(\alpha)} \Rightarrow \frac{e^\alpha}{e^\beta} = \frac{f(\beta)}{f(\alpha)} \Rightarrow e^\alpha f(\alpha) = e^\beta f(\beta) \Rightarrow \boxed{g(\alpha) = g(\beta)}$$

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Rolle υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος ώστε $g'(\xi) = 0$

β) $g(x) = e^x f(x) \xrightarrow{\text{παραγωγίζουμε}} g'(x) = e^x f(x) + e^x f'(x) \xrightarrow{\text{θέτουμε } x=\xi} \Rightarrow$

$$\Rightarrow g'(\xi) = e^\xi f(\xi) + e^\xi f'(\xi) \xrightarrow{g'(\xi)=0} 0 = e^\xi f(\xi) + e^\xi f'(\xi) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^\xi [f(\xi) + f'(\xi)] = 0 \xrightarrow{e^\xi \neq 0} f(\xi) + f'(\xi) = 0 \Rightarrow \boxed{f'(\xi) = -f(\xi)}$$

Η εφαπτομένη της C_f στο $M(\xi, f(\xi))$ έχει εξίσωση $y - f(\xi) = f'(\xi)(x - \xi)$

Για να διέρχεται από το σημείο $(1, \xi f(\xi))$ θα πρέπει το σημείο αυτό να την επαληθεύει

Πράγματι

$$\xi f(\xi) - f(\xi) = f'(\xi)(1 - \xi) \Rightarrow \xi f(\xi) - f(\xi) = f'(\xi) - \xi f'(\xi) \xrightarrow{f'(\xi) = -f(\xi)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \xi f(\xi) - f(\xi) = -f(\xi) + \xi f(\xi) \text{ που ισχύει προφανώς}$$

γ) $g(x) = e^x f(x) \xrightarrow{\text{παραγωγίζουμε}} g'(x) = e^x f(x) + e^x f'(x) \xrightarrow{\text{παραγωγίζουμε}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow g''(x) = e^x f(x) + e^x f'(x) + e^x f'(x) + e^x f''(x) \xrightarrow{\text{θέτουμε } x=\xi} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g''(\xi) = e^\xi f(\xi) + e^\xi f'(\xi) + e^\xi f'(\xi) + e^\xi f''(\xi) \xrightarrow{g''(\xi)=0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^\xi f(\xi) + 2e^\xi f'(\xi) + e^\xi f''(\xi) = 0 \xrightarrow{f'(\xi) = -f(\xi)} e^\xi f(\xi) - 2e^\xi f(\xi) + e^\xi f''(\xi) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -e^\xi f(\xi) + e^\xi f''(\xi) = 0 \Rightarrow e^\xi f''(\xi) = e^\xi f(\xi) \xrightarrow{e^\xi \neq 0} \boxed{f''(\xi) = f(\xi)}$$

28.Δ2

α) $e^{f(x)} + f(x) = 2x \xrightarrow{\text{παραγωγίζουμε}} e^{f(x)} f'(x) + f'(x) = 2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow f'(x) \left[e^{f(x)} + 1 \right] = 2 \Rightarrow \boxed{f'(x) = \frac{2}{e^{f(x)} + 1}} \Rightarrow f'(x) > 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

β) Επειδή $f'(x) = \frac{2}{e^{f(x)} + 1}$ η f' θα είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων και

$$f''(x) = -\frac{2e^{f(x)}f'(x)}{\left[e^{f(x)} + 1\right]^2} \Rightarrow f''(x) < 0$$

Άρα η f είναι κοίλη στο $\mathbb{R}$

γ) Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$\boxed{g'(x)} = f'(x) - 2 = \frac{2}{e^{f(x)} + 1} - 2 = \frac{2 - 2e^{f(x)}}{e^{f(x)} + 1} = \boxed{\frac{-2e^{f(x)}}{e^{f(x)} + 1}} \Rightarrow g'(x) < 0$$

Άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$

δ) Έχουμε ότι

$$f(x^2) - f(x) > 2x^2 - 2x \Rightarrow f(x^2) - 2x^2 > f(x) - 2x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g(x^2) > g(x) \Rightarrow x^2 < x \Rightarrow x^2 - x < 0$$

πρόσημα του $x^2 - x$

	- 1		1	
+		-		+
	⊖		⊖	

Άρα $x \in (0, 1)$

28.Δ3

α) Η συνάρτηση f

είναι (παραγωγίσιμη και άρα) συνεχής στο $[0, 1]$

είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$

$$f(0) = f(1)$$

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Rolle υπάρχει $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) = 0$

Το x_0 θα είναι μοναδικό επειδή η f στρέφει τα κοίλα κάτω άρα η f' είναι γνησίως φθίνουσα και άρα $1 - 1$

β) Έχουμε ότι

$$\text{Για κάθε } \boxed{x < x_0} \Rightarrow f'(x) > f'(x_0) \Rightarrow \boxed{f'(x) > 0}$$

$$\text{Για κάθε } \boxed{x > x_0} \Rightarrow f'(x) < f'(x_0) \Rightarrow \boxed{f'(x) < 0}$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, x_0]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[x_0, 1]$

- γ) Με βάση τα παραπάνω ερωτήματα ο πίνακας μονοτονίας και ακροτάτων της f είναι ο παρακάτω

x	$-\infty$	0		x_0		1	$+\infty$
$f'(x)$			$-$	0	$+$		
$f(x)$							

Από τον παραπάνω πίνακα βλέπουμε ότι για κάθε $x \in (0, 1)$ είναι $f(x) > 0$

28.Δ4

- α) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f'(x) = \ln(x+1) + \cancel{(x+1)} \frac{1}{\cancel{x+1}} - \ln x - \cancel{x} \frac{1}{\cancel{x}} = \ln(x+1) + 1 - \ln x - 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x) = \ln(x+1) - \ln x \quad \Rightarrow \quad \boxed{f'(x) > 0} \quad \text{για κάθε } x \in (0, +\infty)$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0, +\infty)$ και επομένως θα έχει σύνολο τιμών

$$\text{το } \boxed{f(A) = \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right)}$$

Όμως

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} [(x+1)\ln(x+1) - x \ln x] = \lim_{x \rightarrow 0^+} [(x+1)\ln(x+1)] - \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln x) =$$

$$= (0+1)\ln(0+1) - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \stackrel{\text{DLH}}{=} 0 - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x) = \boxed{0}$$

και

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} [(x+1)\ln(x+1) - x \ln x] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} [x \ln(x+1) - x \ln x] + \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x+1) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x [\ln(x+1) - \ln x] + (+\infty) = (+\infty) + \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \frac{x+1}{x} =$$

$$= (+\infty) + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \frac{x+1}{x}}{\frac{1}{x}} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\ln \frac{x+1}{x}}{\frac{x+1}{x}}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \frac{x+1}{x}}{\frac{1}{x}} =$$

$$\begin{aligned}
&= (+\infty) + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x+1} \cdot \frac{x-(x+1)}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = (+\infty) + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x+1} \cdot \cancel{1}}{\cancel{x^2} \cdot \frac{1}{x^2}} = \\
&= (+\infty) + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x} (x+1)}{\frac{1}{x^2}} = (+\infty) + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+1} = (+\infty) + 1 = \boxed{+\infty}
\end{aligned}$$

Οπότε η f θα έχει σύνολο τιμών το $\boxed{f(A)} = \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \right) = \boxed{(0, +\infty)}$

β) Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$g'(x) = \frac{\frac{\ln(x+1)}{x} - \frac{\ln x}{x+1}}{\ln^2(x+1)} = \frac{\frac{(x+1)\ln(x+1) - x \ln x}{x(x+1)}}{\ln^2(x+1)} = \frac{f(x)}{x(x+1)\ln^2(x+1)} \stackrel{f(x)>0}{x>0} > 0$$

Άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0, +\infty)$ και επομένως θα έχει σύνολο τιμών

$$\text{το } \boxed{g(A) = \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x), \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) \right)}$$

Όμως

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\ln(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\ln(x+1)} = (-\infty) \cdot (+\infty) = \boxed{-\infty}$$

και

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\ln(x+1)} \stackrel{\substack{+\infty \\ +\infty}}{DLH} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x+1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x} = \boxed{1}$$

Οπότε η g θα έχει σύνολο τιμών το $\boxed{g(A)} = \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x), \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) \right) = \boxed{(-\infty, 1)}$

γ) Έχουμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι

$$\begin{aligned}
&\ln(x^2+3)\ln(2x^2+3) < \ln(2x^2+2)\ln(x^2+4) \stackrel{\substack{\ln(x^2+4)>0 \\ \ln(2x^2+3)>0}}{\Leftrightarrow} \frac{\ln(x^2+3)}{\ln(x^2+4)} < \frac{\ln(2x^2+2)}{\ln(2x^2+3)} \Leftrightarrow \\
&g(x^2+3) < g(2x^2+2) \stackrel{g \uparrow}{\Leftrightarrow} x^2+3 < 2x^2+2 \Leftrightarrow x^2 > 1 \Leftrightarrow \boxed{x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)}
\end{aligned}$$

α) Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} f'(x)g(x) - f(x)g'(x) + f(x)g'(x) &= \ln x - \frac{1}{x} \Rightarrow \\ \Rightarrow f'(x)g(x) + f(x)g'(x) + \frac{1}{x} &= f(x)g'(x) + \ln x \Rightarrow \\ \Rightarrow [f(x)g(x) + \ln x]' &= f(x)g'(x) + \ln x \Rightarrow \\ \Rightarrow f(x)g(x) + \ln x &= ce^x \Rightarrow \boxed{f(x)g(x) = ce^x - \ln x} \quad (1) \end{aligned}$$

Ακόμη

$$(1) \xrightarrow{x=1} f(1)g(1) = ce^1 - \ln 1 \xrightarrow{f(1)=g(1)=\sqrt{e}} \sqrt{e}^2 = ce \Rightarrow \boxed{c=1} \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow \boxed{f(x)g(x) = e^x - \ln x}$$

β) Επειδή το $A(2, f(2))$ είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f θα ισχύει

$$\boxed{f''(2) = 0}$$

Επειδή το $B(2, g(2))$ είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της g θα ισχύει

$$\boxed{g''(2) = 0}$$

Επειδή οι εφαπτόμενες των γραφικών παραστάσεων των f, g στα σημεία $A(2, f(2))$ και $B(2, g(2))$ αντίστοιχα είναι παράλληλες θα ισχύει $\boxed{f'(2) = g'(2)}$

Οπότε

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= e^x - \ln x \xrightarrow{\text{παραγωγίζουμε}} f'(x)g(x) + f(x)g'(x) = e^x - \frac{1}{x} \xrightarrow{\text{παραγωγίζουμε}} \\ \Rightarrow f''(x)g(x) + f'(x)g'(x) + f'(x)g'(x) + f(x)g''(x) &= e^x + \frac{1}{x^2} \Rightarrow \end{aligned}$$

θέτουμε $x=2$

$$\Rightarrow f''(2)g(2) + f'(2)g'(2) + f'(2)g'(2) + f(2)g''(2) = e^2 + \frac{1}{2^2} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} f''(2) &= g''(2) = 0 \\ f'(2) &= g'(2) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 2[f'(2)]^2 = e^2 + \frac{1}{4} \Rightarrow 2[f'(2)]^2 = \frac{e^2 + 1}{4} \Rightarrow \boxed{[f'(2)]^2 = \frac{e^2 + 1}{8}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} \stackrel{+\infty}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{1} \stackrel{+\infty}{=} +\infty$$

$$\gamma) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - \ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} \stackrel{+\infty}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \stackrel{+\infty}{=} 0 = +\infty - 0 = \boxed{+\infty}$$

28.Δ6

α) i) Η συνάρτηση h

είναι συνεχής στο $[1, 2]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων

είναι παραγωγίσιμη στο $(1, 2)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$\begin{aligned} \boxed{h'(x)} &= \frac{x[f'(x) - 2x] - [f(x) - x^2]}{x^2} = \frac{xf'(x) - 2x^2 - f(x) + x^2}{x^2} = \\ &= \boxed{\frac{xf'(x) - f(x) - x^2}{x^2}} \end{aligned}$$

$$h(1) = h(2)$$

διότι

$$\boxed{h(1)} = \frac{f(1) - 1^2}{1} \Rightarrow h(1) = \boxed{f(1) - 1}$$

$$\begin{aligned} \boxed{h(2)} &= \frac{f(2) - 2^2}{2} = \frac{f(2) - 4}{2} \stackrel{f(2)=2f(1)+2}{=} \frac{2f(1) + 2 - 4}{2} = \frac{2f(1) - 2}{2} = \\ &= \frac{\cancel{2}[f(1) - 1]}{\cancel{2}} = \boxed{f(1) - 1} \end{aligned}$$

οπότε για την h εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle στο διάστημα $[1, 2]$

ii) Σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα Rolle υπάρχει $x_0 \in (1, 2)$ τέτοιο ώστε

$$h'(x_0) = 0 \quad \stackrel{h'(x) = \frac{xf'(x) - f(x) - x^2}{x^2}}{\Rightarrow} \frac{x_0 f'(x_0) - f(x_0) - x_0^2}{x_0^2} = 0 \Rightarrow \boxed{x_0 f'(x_0) - f(x_0) - x_0^2 = 0}$$

β) Έστω ότι το x_0 του προηγούμενου ερωτήματος δεν είναι μοναδικό

δηλαδή

$$\text{θα υπάρχει } x_1 \in (1, 2) \text{ με } x_1 \neq x_0 \text{ και } x_1 f'(x_1) - f(x_1) - x_1^2 = 0$$

Έστω ότι $x_0 < x_1$. Τότε

$$\text{Θέτουμε } w: [x_0, x_1] \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } w(x) = xf'(x) - f(x) - x^2$$

Η συνάρτηση w

είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων

είναι παραγωγίσιμη στο (x_0, x_1) ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$\boxed{w'(x)} = \cancel{f'(x)} + xf''(x) - \cancel{f'(x)} - 2x = \boxed{x[f''(x) - 2]}$$

$$w(x_0) = w(x_1)$$

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Rolle υπάρχει $\xi \in (x_0, x_1)$ τέτοιος ώστε

$$w'(\xi) = 0 \quad \stackrel{w'(x) = x[f''(x) - 2]}{\Rightarrow} \xi[f''(\xi) - 2] = 0 \quad \stackrel{\xi \in (1, 2) \Rightarrow \xi \neq 0}{\Rightarrow} f''(\xi) - 2 = 0 \Rightarrow f''(\xi) = 2 \text{ άπο το διότι}$$

$f''(x) \neq 2$, για κάθε $x \in [1, 2]$

γ) Η εξίσωση της εφαπτομένης της $g(x) = f(x) - x^2$ στο σημείο της με τετμημένη x_0 έχει εξίσωση

$$g(x) = f(x) - x^2 \Rightarrow g'(x) = f'(x) - 2x \Rightarrow \\ \Rightarrow g'(x_0) = f'(x_0) - 2x_0$$

$$y - g(x_0) = g'(x_0)(x - x_0) \quad \begin{matrix} g(x_0) = f(x_0) - x_0^2 \\ \Rightarrow \end{matrix}$$

$$\Rightarrow y - [f(x_0) - x_0^2] = [f'(x_0) - 2x_0](x - x_0)$$

Η παραπάνω ευθεία θα περνάει από την αρχή των αξόνων αν

$$0 - [f(x_0) - x_0^2] = [f'(x_0) - 2x_0](0 - x_0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -f(x_0) + x_0^2 = -x_0 f'(x_0) + 2x_0^2 \Leftrightarrow x_0 f'(x_0) - f(x_0) - x_0^2 = 0 \text{ που ισχύει από το}$$

α) ερώτημα

28.Δ7

α) Θεωρούμε την συνάρτηση h με $h(x) = (x-1)f'(f(x)) - \ln x$. Η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με $h'(x) = f'(f(x)) + (x-1)f''(f(x))f'(x) - \frac{1}{x}$ (1)

$$\text{Παρατηρούμε ότι } h(1) = (1-1)f'(f(1)) - \ln 1 \Rightarrow h(1) = 0.$$

Οπότε ισχύει

$$(x-1)f'(f(x)) \geq \ln x \Rightarrow (x-1)f'(f(x)) - \ln x \geq 0 \quad \begin{matrix} h(x) = (x-1)f'(f(x)) - \ln x \\ h(1) = 0 \end{matrix} \Rightarrow \boxed{h(x) \geq h(1)}, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Επομένως η συνάρτηση h έχει ολικό ελάχιστο στο $x_0 = 0$, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Fermat θα ισχύει

$$\boxed{h'(1) = 0} \stackrel{(1)}{\Rightarrow} f'(f(1)) + (1-1)f''(f(1))f'(1) - \frac{1}{1} = 0 \stackrel{f(1)=1}{\Rightarrow} f'(1) - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{f'(1) = 1}$$

β) Θεωρούμε την συνάρτηση $h: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, με $h(x) = x^2 f'(x) - x^2$

Η συνάρτηση h

είναι συνεχής στο $[1, 2]$, ως πράξεις συνεχών

είναι παραγωγίσιμη στο $(1, 2)$, ως πράξεις παραγωγίσιμων με

$$h'(x) = x^2 f''(x) + 2xf'(x) - 2x$$

$$\left. \begin{aligned} h(0) &= 0^2 f'(0) - 0^2 = 0 \\ h(1) &= 1^2 \cdot f'(1) - 1^2 \stackrel{f'(1)=1}{=} 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow h(0) = h(1)$$

Οπότε για τη συνάρτηση h ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[a, \beta]$ και επομένως υπάρχει $\xi \in (0, 1)$, τέτοιο ώστε

$$h'(\xi) = 0 \Leftrightarrow \xi^2 f''(\xi) + 2\xi f'(\xi) - 2\xi = 0 \Leftrightarrow \xi [\xi f''(\xi) + 2f'(\xi) - 2] = 0 \Leftrightarrow \xi \in (0,1) \Rightarrow \xi \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \xi f''(\xi) + 2f'(\xi) - 2 = 0 \Leftrightarrow \boxed{\xi f''(\xi) + 2f'(\xi) = 2}$$

28.Δ8

- α) Θεωρούμε την συνάρτηση h με $h(x) = [f'(x)]^2 + f^2(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Η συνάρτηση h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$h'(x) = 2f'(x)f''(x) + 2f(x)f'(x) = 2f'(x)[f''(x) + f'(x)] \stackrel{f''(x)+f'(x)=0}{=} 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

$$\text{άρα σύμφωνα με γνωστή πρόταση θα είναι } h(x) = c \Rightarrow \boxed{[f'(x)]^2 + f^2(x) = c}$$

- β) Θεωρούμε την συνάρτηση w με $w(x) = f(x+\alpha) - f'(\alpha)\eta\mu x - f(\alpha)\sigma\upsilon\nu x$, $x \in \mathbb{R}$. Η συνάρτηση w είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$w'(x) = f'(x+\alpha) - f'(\alpha)\sigma\upsilon\nu x + f(\alpha)\eta\mu x$$

$$w''(x) = f''(x+\alpha) + f'(\alpha)\eta\mu x + f(\alpha)\sigma\upsilon\nu x$$

Παρατηρούμε ότι

$$\boxed{w''(x) + w(x)} = f''(x+\alpha) + \cancel{f'(\alpha)\eta\mu x} + \cancel{f(\alpha)\sigma\upsilon\nu x} + f(x+\alpha) - \cancel{f'(\alpha)\eta\mu x} - \cancel{f(\alpha)\sigma\upsilon\nu x} =$$

$$= f''(x+\alpha) + f(x+\alpha) \stackrel{f''(x)+f'(x)=0}{=} \boxed{0}$$

Οπότε η συνάρτηση w έχει την ιδιότητα που έχει και η f , δηλαδή $(w''(x) + w(x) = 0)$ άρα θα έχει και την ιδιότητα του α ερωτήματος δηλαδή θα ισχύει

$$\boxed{[w'(x)]^2 + w^2(x) = c} \quad (1)$$

Ακόμη είναι

$$w(0) = f(0+\alpha) - f'(\alpha)\eta\mu 0 - f(\alpha)\sigma\upsilon\nu 0 \Rightarrow \boxed{w(0) = 0}$$

και

$$w'(0) = f'(0+\alpha) - f'(\alpha)\sigma\upsilon\nu 0 + f(\alpha)\eta\mu 0 \Rightarrow \boxed{w'(0) = 0}$$

Οπότε θέτοντας στην σχέση (1), $x = 0$ έχουμε

$$[w'(0)]^2 + w^2(0) = c \Rightarrow \boxed{c = 0}$$

Επομένως η σχέση (1) γίνεται

$$[w'(x)]^2 + w^2(x) = 0 \Rightarrow w(x) = 0 \Rightarrow f(x+\alpha) - f'(\alpha)\eta\mu x - f(\alpha)\sigma\upsilon\nu x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{f(x+\alpha) = f'(\alpha)\eta\mu x + f(\alpha)\sigma\upsilon\nu x}$$

- γ) Θεωρούμε την συνάρτηση g με $g(x) = \eta\mu x$. Παρατηρούμε ότι $g'(x) = \sigma\upsilon\nu x$ και $g''(x) = -\eta\mu x$

Οπότε $g''(x) + g(x) = 0$ άρα και η g έχει την ιδιότητα που έχει η f άρα θα έχει και την ιδιότητα του β) ερωτήματος δηλαδή για κάθε $\alpha, x \in \mathbb{R}$ θα ισχύει

$$g(x + \alpha) = g'(x) \eta \mu x + g(x) \sigma \upsilon \nu x \Rightarrow \eta \mu(x + \alpha) = \sigma \upsilon \nu \alpha \cdot \eta \mu x + \eta \mu \alpha \cdot \sigma \upsilon \nu x \quad \text{θέτουμε } x = \alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\eta \mu(\beta + \alpha) = \sigma \upsilon \nu \alpha \cdot \eta \mu \beta + \eta \mu \alpha \cdot \sigma \upsilon \nu \beta} \quad \text{για κάθε } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

28.Δ9

- α) Θεωρούμε την συνάρτηση h με $h(x) = f(x) - x - f(0)$. Η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με $h'(x) = f'(x) - 1$ (1)

Παρατηρούμε ότι $h(0) = f(0) - 0 - f(0) \Rightarrow h(0) = 0$. Οπότε ισχύει

$$f(x) \geq x + f(0) \Rightarrow f(x) - x - f(0) \geq 0 \quad \text{θέτουμε } \begin{matrix} h(x) = f(x) - x - f(0) \\ h(0) = 0 \end{matrix} \Rightarrow h(x) \geq h(0), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}. \text{ Επομένως}$$

η συνάρτηση h έχει ολικό ελάχιστο στο $x_0 = 0$, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Fermat θα ισχύει $\boxed{h'(0) = 0} \xrightarrow{(1)} f'(0) - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{f'(0) = 1}$

$$\text{Οπότε } f(-x)f'(x) = 1 \quad \text{θέτουμε } x=0 \Rightarrow f(0)f'(0) = 1 \Rightarrow \boxed{f(0) = 1}$$

- β) Παρατηρούμε ότι $\boxed{f(x) \neq 0}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

(διότι αν υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ με $f(x_0) = 0$ τότε

$$f(-x)f'(x) = 1 \quad \text{θέτουμε } x = -x_0 \Rightarrow f(x_0)f'(-x_0) = 1 \Rightarrow 0 = 1 \text{ άτοπο})$$

Οπότε

$$\left. \begin{array}{l} f \text{ συνεχής στο } \mathbb{R} \\ f(x) \neq 0 \\ \text{για κάθε } x \in \mathbb{R} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \text{η } f \text{ διατηρεί} \\ \text{πρόσημο στο } \mathbb{R} \\ f(0) = 1 > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{f(x) > 0} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Επομένως } f(-x)f'(x) = 1 \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{f(-x)} \quad \text{θέτουμε } \begin{matrix} f(-x) > 0 \\ f(-x) > 0 \end{matrix} \Rightarrow \boxed{f'(x) > 0} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

- γ) Έχουμε ότι $f(-x)f'(x) = 1 \quad \text{θέτουμε όπου } x \text{ το } -x \Rightarrow f(x)f'(-x) = 1$

Ακόμη η συνάρτηση $g(x) = f(x)f(-x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$\begin{aligned} \boxed{g'(x)} &= f'(x)f(-x) + f(x)f'(-x)(-x)' = \\ &= f'(x)f(-x) - f(x)f'(-x) \stackrel{\substack{f'(x)f(-x)=1 \\ f(x)f'(-x)=1}}{=} 1-1 = \boxed{0} \end{aligned}$$

που σημαίνει ότι η g είναι σταθερή στο R

$$\delta) \text{ Έχουμε } g(x) = f(x)f(-x) \Rightarrow g(0) = f(0)f(0) \stackrel{f(0)=1}{\Rightarrow} g(0) = 1$$

Οπότε

$$\left. \begin{array}{l} \text{η g είναι σταθερή στο R} \\ g(0)=1 \end{array} \right\} \Rightarrow g(x) = 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Άρα για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι

$$g(x) = 1 \Rightarrow f(x)f(-x) = 1 \stackrel{f'(-x)f'(x)=1 \Rightarrow f(-x) = \frac{1}{f'(x)}}{\Rightarrow} \frac{f(x)}{f'(x)} = 1 \Rightarrow \boxed{f'(x) = f(x)}$$

Οπότε σύμφωνα με γνωστή πρόταση θα είναι

$$f(x) = ce^x \stackrel{f(0)=1 \Rightarrow ce^0=1 \Rightarrow c=1}{\Rightarrow} \boxed{f(x) = e^x}$$

28.Δ10

α) Έχουμε

$$f^3(x) + 3f(x) = x \stackrel{\text{θέτουμε } x=0}{\Rightarrow} f^3(0) + 3f(0) = 0 \Rightarrow f(0)[f^2(0) + 1] = 0 \Rightarrow$$

$$\stackrel{f^2(0)+1 \neq 0}{\Rightarrow} \boxed{f(0) = 0}$$

Ακόμη

$$f^3(x) + 3f(x) = x \stackrel{\text{παραγωγίζουμε}}{\Rightarrow} 3f^2(x)f'(x) + 3f'(x) = 1 \Rightarrow f'(x)[3f^2(x) + 3] = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{f'(x) = \frac{1}{3f^2(x) + 3}} \stackrel{\text{θέτουμε } x=0}{\Rightarrow} f'(0) = \frac{1}{3f^2(0) + 3} \stackrel{f(0)=0}{\Rightarrow} \boxed{f'(0) = \frac{1}{3}}$$

Άρα η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(0, f(0))$ έχει εξίσωση

$$y - f(0) = f'(0)(x - 0) \stackrel{\substack{f(0)=0 \\ f'(0)=\frac{1}{3}}}{\Rightarrow} \boxed{y = \frac{1}{3}x}$$

β) i) Η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $[0, \alpha]$, και στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ αφού είναι παραγωγίσιμη

είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0, \alpha)$ και στο διάστημα (α, β)

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχουν $\xi_1 \in (0, \alpha)$ και $\xi_2 \in (\alpha, \beta)$, τέτοια ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f(\alpha) - f(0)}{\alpha - 0} \Rightarrow f'(\xi_1) = \frac{f(\alpha)}{\alpha} \quad (1)$$

και

$$f'(\xi_2) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \quad (2)$$

Έτσι έχουμε ισοδύναμα

$$\frac{f(\alpha)}{\alpha} > \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \stackrel{(1),(2)}{\Leftrightarrow} f'(\xi_1) > f'(\xi_2) \stackrel{\substack{f' \searrow \text{ στο } (0, +\infty) \\ \text{επεξήγηση 1}}}{\Leftrightarrow} \xi_1 < \xi_2 \quad \text{που ισχύει διότι}$$

$$0 < \xi_1 < \alpha < \xi_2 < \beta$$

επεξήγηση 1

Θα αποδείξουμε ότι η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$

$$\text{Έχουμε δει ότι } f'(x) = \frac{1}{3f^2(x) + 3} \Rightarrow f'(x) > 0 \text{ άρα η } f \text{ είναι γνησίως αύξουσα}$$

Ακόμη

$$f''(x) = \frac{-6f(x)f'(x)}{[3f^2(x) + 3]^2} \stackrel{\substack{f'(x) > 0 \\ f \uparrow \\ x > 0 \Rightarrow f(x) > f(0) \Rightarrow f(0)=0 \Rightarrow f(x) > 0}}{\Rightarrow} f''(x) < 0 \text{ άρα η } f' \text{ είναι γνησίως φθίνουσα στο } (0, +\infty)$$

- ii) Θεωρούμε την συνάρτηση h με $\boxed{h(x) = \frac{f(x)}{x}}$, $x \in (0, +\infty)$. Η h είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $h'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} \quad (1)$

Θεωρούμε τώρα την συνάρτηση w με $\boxed{w(x) = xf'(x) - f(x)}$, $x \in [0, +\infty)$

Η w είναι παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ με

$$w'(x) = xf''(x) + \cancel{f'(x)} - \cancel{f'(x)} \Rightarrow w'(x) = xf''(x) \stackrel{\substack{x \geq 0 \\ f''(x) < 0}}{\Rightarrow} \boxed{w'(x) \leq 0} \text{ , με την ισότητα να ισχύει μόνο για } x = 0$$

άρα η w είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$ οπότε για $x > 0$ έχουμε

$$x > 0 \Rightarrow w(x) < w(0) \Rightarrow xf'(x) - f(x) < 0f'(0) - f(0) \stackrel{f(0)=0}{\Rightarrow} xf'(x) - f(x) < 0 \quad (2)$$

Επομένως $(1), (2) \Rightarrow h'(x) < 0$ και άρα η h είναι γνησίως φθίνουσα

Έτσι έχουμε ισοδύναμα

$$\boxed{\beta f(\alpha) > \alpha f(\beta)} \stackrel{\alpha, \beta > 0}{\Leftrightarrow} \frac{f(\alpha)}{\alpha} > \frac{f(\beta)}{\beta} \stackrel{h^{\gamma}}{\Leftrightarrow} h(\alpha) > h(\beta) \stackrel{h^{\gamma}}{\Leftrightarrow} \alpha < \beta, \text{ που ισχύει}$$

γ) Θεωρούμε την συνάρτηση φ με $\varphi(x) = f(x)g(x) - x - \sin x + 1$, $x \in \mathbb{R}$. Η φ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με $\varphi'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) - 1 + \eta \mu x$ (1)

Παρατηρούμε ότι $\varphi(0) = f(0)g(0) - 0 - \sin 0 + 1 \stackrel{f(0)=0}{\Rightarrow} \varphi(0) = 0$. Οπότε ισχύει

$$f(x)g(x) \geq x + \sin x - 1 \Rightarrow f(x)g(x) - x - \sin x + 1 \geq 0 \stackrel{\substack{\varphi(x) = f(x)g(x) - x - \sin x + 1 \\ \varphi(0) = 0}}{\Rightarrow} \varphi(x) \geq \varphi(0), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}. \text{ Επομένως η συνάρτηση } \varphi \text{ έχει ολικό ελάχιστο στο } x_0 = 0, \text{ οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Fermat θα ισχύει}$$

$$\boxed{\varphi'(0) = 0} \stackrel{(1)}{\Rightarrow} f'(0)g(0) + f(0)g'(0) - 1 + \eta \mu 0 = 0 \stackrel{\substack{f(0)=0 \\ f'(0)=\frac{1}{3}}}{\Rightarrow} \frac{1}{3}g(0) - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{g(0) = 3}$$

28.Δ11

α) Έχουμε

$$\begin{aligned} f^{-1}(f(x)) &= x \stackrel{\text{παραγωγίζουμε}}{\Rightarrow} (f^{-1})'(f(x)) \cdot f'(x) = 1 \stackrel{(f^{-1})'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-16}}}{\Rightarrow} \frac{1}{\sqrt{f^2(x)-16}} f'(x) = 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow \boxed{f'(x) = \sqrt{f^2(x)-16}} &\stackrel{\text{παραγωγίζουμε}}{\Rightarrow} f''(x) = \frac{1}{\cancel{\sqrt{f^2(x)-16}}} \cancel{2f(x)f'(x)} \stackrel{f'(x) = \sqrt{f^2(x)-16}}{\Rightarrow} \\ \Rightarrow f''(x) &= \frac{1}{\cancel{\sqrt{f^2(x)-16}}} f(x) \cancel{\sqrt{f^2(x)-16}} \Rightarrow \boxed{f''(x) = f(x)} \end{aligned}$$

β) Έχουμε

$$f''(x) = f(x) \Rightarrow f''(x) - f(x) = 0 \stackrel{\text{προσθαφαιρούμε } f'(x)}{\Rightarrow} f''(x) - f'(x) + f'(x) - f(x) = 0 \Rightarrow$$

$$\stackrel{\text{πολλαπλασιάζουμε με } e^{-x}}{=} e^{-x}f''(x) - e^{-x}f'(x) + e^{-x}f'(x) - e^{-x}f(x) = 0 \cdot e^{-x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [e^{-x}f'(x) + e^{-x}f(x)]' = 0 \Rightarrow e^{-x}f'(x) + e^{-x}f(x) = c \quad (1)$$

$$\text{Έχουμε ότι } f'(x) = \sqrt{f^2(x)-16} \stackrel{\text{θέτουμε } x=0}{=} f'(0) = \sqrt{f^2(0)-16} \stackrel{f(0)=5}{\Rightarrow} f'(0) = \sqrt{9} \Rightarrow f'(0) = 3$$

Έτσι

$$(1) \stackrel{\text{θέτουμε } x=0}{\Rightarrow} e^{-0}f'(0) + e^{-0}f(0) = c \stackrel{\substack{f(0)=5 \\ f'(0)=3}}{\Rightarrow} 5 + 3 = c \Rightarrow c = 8 \quad (2)$$

Οπότε

$$(1) \Rightarrow e^{-x}f'(x) + e^{-x}f(x) = 8 \Rightarrow f'(x) + f(x) = 8e^x \Rightarrow e^x f'(x) + e^x f(x) = 8e^{2x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [e^x f(x)]' = (4e^{2x})' \Rightarrow e^x f(x) = 4e^{2x} + c_1 \stackrel{\substack{\text{θέτουμε } x=0 \\ f(0)=5}}{e^0 f(0) = 4e^0 + c_1 \Rightarrow c_1 = 1} \Rightarrow e^x f(x) = 4e^{2x} + 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^x f(x) = 4e^{2x} + 1 \Rightarrow \boxed{f(x) = 4e^x + \frac{1}{e^x}}$$

28.Δ12

- α) Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[1, 3]$, αφού είναι παραγωγίσιμη είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(1, 3)$

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει $\xi_1 \in (1, 3)$, τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} \Rightarrow f'(\xi_1) = \frac{4 - 2}{2} \Rightarrow \boxed{f'(\xi_1) = 1}$$

- β) Θεωρούμε την συνάρτηση $h: [1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ με $h(x) = f(x) - x - 1$.

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $[1, 3]$ με $\boxed{h'(x) = f'(x) - 1}$

Η h προφανώς μηδενίζεται στο ξ .

Ακόμη

Επειδή η f είναι κυρτή η f' θα είναι γνησίως αύξουσα, άρα

$$\text{για κάθε } x < \overset{f' \nearrow}{\xi} \Rightarrow f'(x) < f'(\xi) \Rightarrow f'(x) < 1 \Rightarrow h'(x) < 0$$

$$\text{για κάθε } x > \overset{f' \nearrow}{\xi} \Rightarrow f'(x) > f'(\xi) \Rightarrow f'(x) > 1 \Rightarrow h'(x) > 0$$

Ακόμη

$$h(1) = f(1) - 1 - 1 \overset{f(1)=2}{\Rightarrow} h(1) = 0$$

$$h(3) = f(3) - 3 - 1 \overset{f(3)=4}{\Rightarrow} h(3) = 0$$

Τα πρόσημα της f' , η μονοτονία και τα ακρότατα της f καθώς και οι τιμές της στα άκρα του πεδίου ορισμού της φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	1	ξ	3	$+\infty$
$h'(x)$			-	+	
$h(x)$		0		0	

Έτσι

$$\text{για κάθε } x \in (1, \xi) \Rightarrow x > 1 \overset{h \searrow}{\Rightarrow} h(x) < h(1) \Rightarrow h(x) < 0$$

$$\text{για κάθε } x \in (\xi, 3) \Rightarrow x < 3 \overset{h \nearrow}{\Rightarrow} h(x) < h(3) \Rightarrow h(x) < 0$$

$$\text{Άρα για κάθε } x \in (1, 3) \text{ είναι } h(x) < 0 \Rightarrow f(x) - x - 1 < 0 \Rightarrow \boxed{f(x) < x + 1}$$