

28.B1

ΔΕΔΟΜΕΝΑ	ΖΗΤΟΥΜΕΝΑ
$2x^2(t) + 3y^2(t) = 11$ $y'(t_0) = -8$ $x(t_0) = 2$ $y(t_0) = 1$	$x'(t_0) = ?$

$$2x^2(t) + 3y^2(t) = 11 \xrightarrow{\text{παραγωγίζουμε}} 2x(t)x'(t) + 3y(t)y'(t) = 0 \xrightarrow{\text{θέτουμε } t=t_0}$$

$$\Rightarrow 2x(t_0)x'(t_0) + 3y(t_0)y'(t_0) = 0 \Rightarrow 2 \cdot 2 \cdot x'(t_0) + 3 \cdot 1 \cdot (-8) = 0 \Rightarrow$$

$$4x'(t_0) - 24 = 0 \Rightarrow 4x'(t_0) = 24 \Rightarrow x'(t_0) = 6$$

28.B2

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} \stackrel{+\infty}{\underset{\text{DLH}}{=}} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{+\infty} = \boxed{0}$$

β) Το πεδίο ορισμού της f είναι το $A = (0, +\infty)$

Αρχικά ψάχνουμε για κατακόρυφες ασύμπτωτες

Επειδή η f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $A = (0, +\infty)$, ψάχνουμε για κατακόρυφη ασύμπτωτη στο $x_0 = 0$

Έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x) \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = (-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty, \text{ άρα η ευθεία } \boxed{x=0}$$

είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της f

Η f δεν έχει άλλες κατακόρυφες ασύμπτωτες διότι είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της

Τώρα θα ψάξουμε πλάγιες και οριζόντιες ασύμπτωτες στο $+\infty$

Από το α) ερώτημα έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \text{ άρα η ευθεία } \boxed{y=0} \text{ είναι } \underline{\text{οριζόντια}} \text{ ασύμπτωτη της f στο } +\infty$$

28.B3

α) Η συνάρτηση g είναι

είναι συνεχής στο $[1, 2]$ ως ηλίκο συνεχών συναρτήσεων

είναι παραγωγίσιμη στο $(1, 2)$ ως ηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$g'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} g(1) = \frac{f(1)}{1} = f(1) \\ g(2) = \frac{f(2)}{2} \stackrel{f(2)=2f(1)}{=} \frac{\cancel{2}f(1)}{\cancel{2}} = f(1) \end{array} \right\} \Rightarrow g(1) = g(2)$$

Οπότε για τη συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του
Θ. Rolle στο διάστημα $[1, 2]$

β) Από το θεώρημα Rolle του προηγούμενου ερωτήματος έπεται ότι υπάρχει $\xi(1, 2)$

$$\text{τέτοιο ώστε } g'(\xi) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{g'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2}}{\xi^2} = 0 \Rightarrow \xi f'(\xi) - f(\xi) = 0$$

28.B4

$$g(x) = f(x^2) \xrightarrow{\text{παραγωγίζουμε}} g'(x) = 2x \cdot f'(x^2) \xrightarrow{\text{παραγωγίζουμε}} g''(x) = 2f'(x^2) + 2xf''(x^2) \cdot 2x \Rightarrow$$

$$\xrightarrow{\text{θέτουμε } x=1} g''(1) = 2f'(1^2) + 4 \cdot 1^2 \cdot f''(1^2) \Rightarrow g''(1) = 2f'(1) + 4f''(1) \quad \xrightarrow{f'(1)=f''(1)=2}$$

$$\Rightarrow g''(1) = 2 \cdot 2 + 4 \cdot 2 \Rightarrow \boxed{g''(1) = 12}$$

28.B5

α) Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με

$$g'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} \stackrel{xf'(x)=f(x)}{\Rightarrow} \boxed{g'(x) = 0}$$

και άρα η g είναι σταθερή στο $(0, +\infty)$

β) Επειδή η g είναι σταθερή έχουμε ότι $g(x) = c \Rightarrow \frac{f(x)}{x} = c \Rightarrow \boxed{f(x) = cx} \quad (1)$

$$\text{Όμως } f(2) = 4 \stackrel{(1)}{\Rightarrow} 2c = 4 \Rightarrow \boxed{c = 2} \quad (2)$$

$$\text{Έτσι } (1), (2) \Rightarrow \boxed{f(x) = 2x} \text{ για κάθε } x > 0$$

28.B6

Θεωρούμε την συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = 3^x$

Η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, ως εκθετική

είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα (α, β) , ως εκθετική με $f'(x) = 3^x \ln 3$

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$, τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \Rightarrow 3^\xi \ln 3 = \frac{3^\beta - 3^\alpha}{\beta - \alpha} \quad (1)$$

Οπότε έχουμε ισοδύναμα

$$3^a \ln 3 < \frac{3^\beta - 3^a}{\beta - a} < 3^\beta \ln 3 \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} 3^a \ln 3 < 3^\xi \ln 3 < 3^\beta \ln 3 \stackrel{\ln 3 > 0}{\Leftrightarrow} 3^a < 3^\xi < 3^\beta \Leftrightarrow a < \xi < \beta \text{ που}$$

ισχύει διότι $\xi \in (a, \beta)$

28.B7

- α)** Η f ως πολυωνυμική, έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό με $f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1) = 4x(x-1)(x+1)$

Η f' μηδενίζεται στο $x_1 = -1$ στο $x_2 = 0$ και στο $x_3 = 1$ με

$$f(-1) = (-1)^4 - 2(-1)^2 = -1, \quad f(0) = 0^4 - 2 \cdot 0^2 = 0 \quad \text{και} \quad f(1) = 1^4 - 2 \cdot 1^2 = -1$$

Τα πρόσημα της f' , η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα μονοτονίας

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$			
$f'(x)$	-	0	+	-	0	+		
$f(x)$								
		-1	0		-1			

Άρα η f έχει

τοπικό ελάχιστο στο $x_1 = -1$ ίσο με -1

τοπικό μέγιστο στο $x_2 = 0$ ίσο με 0

τοπικό ελάχιστο στο $x_3 = 1$ ίσο με -1

- β)** Έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^4) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^4) = +\infty$$

Οπότε και με βάση τον πίνακα του προηγούμενου ερωτήματος

στο διάστημα $A_1 = (-\infty, -1]$ η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα με

$$f(A_1) = \left[f(0), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right) = [-1, +\infty) .$$

Άρα η εξίσωση $f(x) = -\frac{1}{2}$ έχει μία ακριβώς ρίζα στο διάστημα $A_1 = (-\infty, -1]$

στο διάστημα $A_2 = [-1, 0]$ η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα με

$$f(A_2) = [f(-1), f(0)] = [-1, 0] .$$

Άρα η εξίσωση $f(x) = -\frac{1}{2}$ έχει μία ακριβώς ρίζα στο διάστημα $A_2 = [-1, 0]$

στο διάστημα $A_3 = [0, 1]$ η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα με

$$f(A_3) = [f(1), f(0)] = [-1, 0] .$$

Άρα η εξίσωση $f(x) = -\frac{1}{2}$ έχει μία ακριβώς ρίζα στο διάστημα $A_2 = [0, 1]$

τέλος στο διάστημα $A_4 = [1, +\infty)$ η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα με

$$f(A_4) = \left[f(1), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = [-1, +\infty) .$$

Άρα η εξίσωση $f(x) = -\frac{1}{2}$ έχει μία ακριβώς ρίζα στο διάστημα $A_4 = [1, +\infty)$

Επομένως η f έχει συνολικά 4 ρίζες στο $\mathbb{R}$

28.B8

α) Είναι $f(1) = (1^2 - 4 \cdot 1 + 6)e^{1-1} \Rightarrow \boxed{f(1) = 3}$

$$f'(x) = (2x - 4)e^{x-1} + (x^2 - 4x + 6)e^{x-1} \Rightarrow f'(x) = (2x - 4 + x^2 - 4x + 6)e^{x-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{f'(x) = (x^2 - 2x + 2)e^{x-1}} \Rightarrow f'(1) = (1^2 - 2 \cdot 1 + 2)e^{1-1} \Rightarrow \boxed{f'(1) = 1}$$

Οπότε η εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο σημείο $(1, f(1))$ είναι

$$y - f(1) = f'(1)(x - 1) \xrightarrow[\substack{f(1)=3 \\ f'(1)=1}}{y - 3 = x - 1} \Rightarrow \boxed{y = x + 2}$$

β) Στο α) ερώτημα βρήκαμε

$$f'(x) = (x^2 - 2x + 2)e^{x-1} \xrightarrow{\text{παραγωγίζουμε}} f''(x) = (2x - 2)e^{x-1} + (x^2 - 2x + 2)e^{x-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{f''(x) = x^2 e^{x-1} \geq 0} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ (με την ισότητα να ισχύει σε μεμονωμένα σημεία)}$$

Άρα η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$

γ) Επειδή η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$ θα βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Οπότε θα βρίσκεται πάνω και από την εφαπτόμενη του προηγούμενου ερωτήματος. Άρα για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι

$$f(x) \geq x + 2 \Rightarrow (x^2 - 4x + 6)e^{x-1} \geq x + 2 \xrightarrow{x^2 - 4x + 6 \neq 0 \text{ (}\Delta = -8 < 0\text{)}} \boxed{e^{x-1} \geq \frac{x + 2}{x^2 - 4x + 6}}$$

28.B9

Η εφαπτόμενη της C_f , στο $(1, f(1))$ έχει εξίσωση

$$y - f(1) = f'(1)(x - 1) \quad (1)$$

Για να εφάπτεται η ευθεία (1) και στην C_g , στο $(0, g(0))$ θα πρέπει να ισχύουν

$$\alpha) \quad g'(0) = f'(1) \xrightarrow{f'(1)=f(1)} g'(0) = f'(1) \quad \beta) \quad \text{το } (0, g(0)) \text{ να ικανοποιεί την (1)}$$

Πράγματι

$$g(x) = xf(x+1) \xrightarrow{\text{παραγωγίζουμε}} g'(x) = f(x+1) + xf'(x+1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g'(0) = f(0+1) + 0f'(0+1) \Rightarrow \boxed{g'(0) = f(1)} \quad \text{άρα ισχύει το } \alpha)$$

Ακόμη

$$g(0) = 0f(0+1) \Rightarrow g(0) = 0$$

Οπότε

$$(1) \Leftrightarrow g(0) - f(1) = f'(1)(0-1) \Leftrightarrow g(0) - f(1) = -f'(1) \stackrel{f'(1)=f(1)}{\Leftrightarrow} g(0) = 0 \text{ που ισχύει άρα ισχύει και το } \beta)$$

28.B10

Έχουμε ότι

$$f(x) = \eta\mu^2 x \Rightarrow f'(x) = 2\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f''(x) = (2\eta\mu x)' \cdot \sigma\upsilon\nu x + 2\eta\mu x \cdot (\sigma\upsilon\nu x)' \Rightarrow \boxed{f''(x) = 2\sigma\upsilon\nu^2 x - 2\eta\mu^2 x}$$

Οπότε

$$\boxed{f''(x) + 4f(x)} = 2\sigma\upsilon\nu^2 x - 2\eta\mu^2 x + 4\eta\mu^2 x = 2\sigma\upsilon\nu^2 x + 2\eta\mu^2 x =$$

$$= 2(\sigma\upsilon\nu^2 x + \eta\mu^2 x) = 2 \cdot 1 = \boxed{2}$$

28.B11

$$a) \quad f(x) = x^4 - 2\alpha x^3 + 3\alpha^2 x^2 - 2 \Rightarrow f'(x) = 4x^3 - 6\alpha x^2 + 6\alpha^2 x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x) = 2x(2x^2 - 3\alpha x + 3\alpha^2)$$

Το τριώνυμο $2x^2 - 3\alpha x + 3\alpha^2$ έχει διακρίνουσα $\Delta = -15\alpha^2 \leq 0$ και άρα είναι θετικό για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (εκτός ίσως από ένα μεμονωμένο σημείο μηδενισμού το οποίο όμως δεν επηρεάζει την μονοτονία). Ακόμη η f' μηδενίζεται στο $x_0 = 0$ και

$$f(0) = 0^4 - 2\alpha \cdot 0^3 + 3\alpha^2 \cdot 0^2 - 2 \Rightarrow f(0) = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 = +\infty$$

Τα πρόσημα της f' , η μονοτονία και τα ακρότατα της f καθώς και τα όρια της στα άκρα του πεδίου ορισμού της φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		$\emptyset$	
		$-$	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\nearrow$
		$\boxed{-2}$	

Οπότε

στο διάστημα $A_1 = (-\infty, 0]$ η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα με

$$f(A_1) = \left[f(0), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right) = [-2, +\infty)$$

στο διάστημα $A_2 = [1, +\infty)$ η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα άρα

$$f(A_2) = \left[f(0), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = [-2, +\infty)$$

Επομένως το σύνολο τιμών της f είναι το

$$f(A) = f(A_1) \cup f(A_2) = [-2, +\infty)$$

β) Με βάση τον προηγούμενο πίνακα

στο διάστημα $A_1 = (-\infty, 0]$ η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα με

$$f(A_1) = \left[f(0), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right) = [-2, +\infty)$$

άρα έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα $A_1 = (-\infty, 0]$

στο διάστημα $A_2 = [1, +\infty)$ η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα άρα

$$f(A_2) = \left[f(0), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = [-2, +\infty)$$

άρα έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα $A_1 = (-\infty, 0]$

Τελικά η f έχει ακριβώς δύο ρίζες

γ) Ομοίως με βάση τον πίνακα του α) ερωτήματος η εξίσωση $f(x) = -2$ έχει ακριβώς μία ρίζα την $x_0 = 0$

28.B12

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+2}{x} \right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\ln \left(\frac{x+2}{x} \right)^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x \ln \left(\frac{x+2}{x} \right)} \stackrel{\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(\frac{x+2}{x} \right) = 2}{\text{επεξήγηση!}} = \boxed{e^2}$$

επεξήγηση 1

$$\begin{aligned} \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(\frac{x+2}{x} \right)} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \left(\frac{x+2}{x} \right)}{\frac{1}{x}} \stackrel{\frac{0}{0}}{\text{DLH}} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x+2} \cdot \left(\frac{x+2}{x} \right)'}{-\frac{1}{x^2}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x}{x+2} \cdot \frac{x-(x+2)}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x+2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x} = \boxed{2} \end{aligned}$$

28.B13

Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και είναι συνεχής άρα δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

Ακόμη $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ άρα δεν έχει ούτε οριζόντιες ασύμπτωτες

Θα ψάξουμε λοιπόν για πλάγιες ασύμπτωτες

Στο $-\infty$ είναι

$$\begin{aligned} \boxed{\lambda} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - x + 2}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} \right)}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2} \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}}}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x| \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}}}{x} \stackrel{|x| = -x}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\cancel{x} \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}}}{\cancel{x}} = -\sqrt{1 - 0 + 0} = \boxed{-1} \end{aligned}$$

και

$$\boxed{\beta} = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - \lambda x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 - x + 2} + x \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - x + 2} + x)(\sqrt{x^2 - x + 2} - x)}{\sqrt{x^2 - x + 2} - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - x + 2}^2 - x^2}{\sqrt{x^2 \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}\right)} - x} = \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x + 2}{|x| \sqrt{\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}\right)} - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left(-1 + \frac{2}{x}\right)}{-x \sqrt{\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}\right)} - x} = \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cancel{x} \left(-1 + \frac{2}{x}\right)}{\cancel{x} \left(-\sqrt{\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}\right)} - 1\right)} = \frac{-1 + 0}{-\sqrt{1 - 0 + 0} - 1} = \boxed{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

Άρα η ευθεία $\boxed{y = -x + \frac{1}{2}}$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$

Ομοίως στο $+\infty$ είναι

$$\begin{aligned}
\boxed{\lambda} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - x + 2}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}\right)}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2} \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}}}{x} = \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x| \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}}}{x} = \stackrel{x > 0}{|x| = x} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x} \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}}}{\cancel{x}} = \sqrt{1 - 0 + 0} = \boxed{1}
\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}
\boxed{\beta} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \lambda x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - x + 2} - x) = \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - x + 2} - x)(\sqrt{x^2 - x + 2} + x)}{\sqrt{x^2 - x + 2} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - x + 2}^2 - x^2}{\sqrt{x^2 \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}\right)} + x} = \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x + 2}{|x| \sqrt{\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}\right)} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(-1 + \frac{2}{x}\right)}{x \sqrt{\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}\right)} + x} = \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x} \left(-1 + \frac{2}{x}\right)}{\cancel{x} \left(\sqrt{\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}\right)} + 1\right)} = \frac{-1 + 0}{\sqrt{1 - 0 + 0} + 1} = \boxed{-\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

Άρα η ευθεία $\boxed{y = x + \frac{1}{2}}$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$

Οι δύο πλάγιες ασύμπτωτες έχουν συντελεστές διεύθυνσης αντίστοιχα $\lambda_1 = -1$ και $\lambda_2 = 1$ και προφανώς είναι κάθετες