

26.9 1)

Καταρχήν θα πρέπει

$$M \in C_f \Rightarrow f(-1) = 2 \Rightarrow \alpha(-1)^3 - \beta(-1)^2 = 2 \Rightarrow -\alpha - \beta = 2 \Rightarrow \alpha + \beta = -2 \quad (1)$$

Ακόμη επειδή θέλουμε η f να παρουσιάζει σημείο καμπής στο M θα πρέπει

$$f''(-1) = 0 \Rightarrow \begin{matrix} f'(x) = 3\alpha x^2 - 2\beta x \\ f''(x) = 6\alpha x - 2\beta \end{matrix} \Rightarrow 6\alpha(-1) - 2\beta = 0 \Rightarrow -6\alpha - 2\beta = 0 \quad (2)$$

Λύνοντας το σύστημα των (1) και (2) βρίσκουμε $\alpha = 1$ και $\beta = -3$

Επαλήθευση

Για $\alpha = 1$ και $\beta = -3$ είναι

$$f(x) = x^3 + 3x^2 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 6x \Rightarrow f''(x) = 6x + 6 = 6(x+1)$$

$$\text{Είναι } f''(x) = 0 \Rightarrow x = -1$$

Τα πρόσημα της f'' , και η κυρτότητα της f φαίνονται στον διπλανό πίνακα

Οπότε για $\alpha = 1$ και $\beta = -3$ παρατηρούμε ότι πράγματι η f παρουσιάζει καμπή στο $x_0 = -1$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$		$\sigma.κ.$	

26.9 2)

Καταρχήν θα πρέπει

$$M \in C_f \Rightarrow f(2) = 1 \Rightarrow 2^3 + \alpha \cdot 2^2 + \beta \cdot 2 + 7 = 1 \Rightarrow 8 + 4\alpha + 2\beta + 7 = 1 \Rightarrow$$

$$4\alpha + 2\beta = -14 \xrightarrow{\text{διαιρούμε με 2}} 2\alpha + \beta = -7 \quad (1)$$

Ακόμη επειδή θέλουμε η f να παρουσιάζει σημείο καμπής στο M θα πρέπει

$$f''(2) = 0 \Rightarrow \begin{matrix} f'(x) = 3x^2 + 2\alpha x + \beta \\ f''(x) = 6x + 2\alpha \end{matrix} \Rightarrow 6 \cdot 2 + 2\alpha = 0 \Rightarrow 12 + 2\alpha = 0 \Rightarrow 2\alpha = -12 \Rightarrow \alpha = -6 \quad (2)$$

$$\text{Οπότε } (1) \xrightarrow{(2)} 2(-6) + \beta = -7 \Rightarrow -12 + \beta = -7 \Rightarrow \beta = 5$$

Επαλήθευση

Για $\alpha = -6$ και $\beta = 5$ είναι

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 5x + 7 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 12x + 5 \Rightarrow f''(x) = 6x + 12 = 6(x+2)$$

$$\text{Είναι } f''(x) = 0 \Rightarrow x = -2$$

Τα πρόσημα της f'' , και η κυρτότητα της f φαίνονται στον διπλανό πίνακα

Οπότε για $\alpha = -6$ και $\beta = 5$ παρατηρούμε ότι πράγματι η f παρουσιάζει καμπή στο $x_0 = -2$

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f''(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$		$\sigma.κ.$	

26.9 3)

Επειδή θέλουμε η f να έχει τοπικό ακρότατο στο $x_1 = 1$, θα πρέπει

$$f'(1) = 0 \Rightarrow \begin{matrix} f'(x) = 3\alpha x^2 + 2\beta x - 15 \end{matrix} \Rightarrow 3\alpha \cdot 1^2 + 2\beta \cdot 1 - 15 = 0 \Rightarrow 3\alpha + 2\beta = 15 \quad (1)$$

Ακόμη επειδή θέλουμε η f να έχει σημείο καμπής στο $x_2 = -2$, θα πρέπει

$$f''(-2) = 0 \Rightarrow \begin{matrix} f''(x) = 6\alpha x + 2\beta \end{matrix} \Rightarrow 6\alpha \cdot (-2) + 2\beta = 0 \Rightarrow -12\alpha + 2\beta = 0 \Rightarrow 2\beta = 12\alpha \Rightarrow \beta = 6\alpha \quad (2)$$

Λύνοντας το σύστημα των (1) και (2) βρίσκουμε $\alpha = 1$ και $\beta = 6$

Επαλήθευση

Για $\alpha = 1$ και $\beta = 6$ είναι

$$f(x) = x^3 + 6x^2 - 15x - 4 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 12x - 15 = 3(x^2 + 4x - 5)$$

Είναι

$$x^2 + 4x - 5: \Delta = 16 + 20 = 36, \quad x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{36}}{2 \cdot 1} = \frac{-4 \pm 6}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-4+6}{2} = 1 \\ x_2 = \frac{-4-6}{2} = -5 \end{cases}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ ή } x = -5$$

Τα πρόσημα της f' , και η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον διπλανό πίνακα. Οπότε για $\alpha = 1$ και $\beta = 6$ παρατηρούμε ότι πράγματι η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0 = -2$

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$		 $\tau\mu$	 $\tau\varepsilon$		

Ακόμη είναι $f''(x) = 6x + 12 = 6(x + 2)$

$$\text{Έτσι } f''(x) = 0 \Rightarrow x = -2$$

Τα πρόσημα της f'' , και η κυρτότητα της f φαίνονται στον διπλανό πίνακα. Οπότε για $\alpha = 1$ και $\beta = 6$ παρατηρούμε ότι πράγματι η f παρουσιάζει καμπή στο $x_0 = -2$

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f''(x)$	+	0	-
$f(x)$	↪	σ.κ.	↩

26.9 4)

Είναι

$$f(x) = x^3 - \alpha x^2 + \beta x + \gamma \xrightarrow{\text{παραγωγίζουμε}} f'(x) = 3x^2 - 2\alpha x + \beta \Rightarrow$$

$$\xrightarrow{\text{παραγωγίζουμε}} f''(x) = 6x - 2\alpha$$

Οπότε

$$\text{Επειδή } A(2, 7) \in C_f \Rightarrow \boxed{f(2) = 7} \Rightarrow 2^3 - \alpha \cdot 2^2 + \beta \cdot 2 + \gamma = 7 \Rightarrow 8 - 4\alpha + 2\beta + \gamma = 7 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -4\alpha + 2\beta + \gamma = -1 \Rightarrow \quad (1)$$

Επειδή η f έχει ακρότατο στο $x_0 = 1$

$$\Rightarrow \boxed{f'(1) = 0} \Rightarrow 3 \cdot 1^2 - 2\alpha \cdot 1 + \beta = 0 \Rightarrow -2\alpha + \beta = -3 \quad (2)$$

$$\text{Τέλος επειδή η } f \text{ έχει σημείο καμπής στο } x_1 = 3 \Rightarrow \boxed{f''(3) = 0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6 \cdot 3 - 2\alpha = 0 \Rightarrow 18 - 2\alpha = 0 \Rightarrow 2\alpha = 18 \Rightarrow \alpha = 9 \quad (3)$$

Λύνοντας το σύστημα των (1), (2) και (3) βρίσκουμε $\alpha = 9$, $\beta = 15$ και $\gamma = 5$

Επαλήθευση

Για $\alpha = 9$, $\beta = 15$ και $\gamma = 5$ είναι

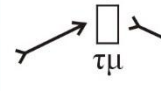
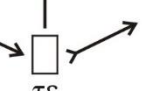
$$f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x + 5 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 18x + 15 = 3(x^2 - 6x + 5)$$

Είναι

$$x^2 - 6x + 5: \Delta = 36 - 20 = 16, \quad x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm 4}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{6+4}{2} = 5 \\ x_2 = \frac{6-4}{2} = 1 \end{cases}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 5 \text{ ή } x = 1$$

Τα πρόσημα της f' , και η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον διπλανό πίνακα
Οπότε για $\alpha = 9$, $\beta = 15$ και $\gamma = 5$ παρατηρούμε ότι πράγματι η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0 = 1$

x	$-\infty$	1	5	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$					

Ακόμη είναι $f''(x) = 6x - 18 = 6(x - 3)$

Έτσι $f''(x) = 0 \Rightarrow x = 3$

Τα πρόσημα της f'' , και η κυρτότητα της f φαίνονται στον διπλανό πίνακα
Οπότε για $\alpha = 9$, $\beta = 15$ και $\gamma = 5$ παρατηρούμε ότι πράγματι η f παρουσιάζει καμπή στο $x_0 = 3$

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f''(x)$	+	0	-
$f(x)$		σ.κ.	

26.9 5)

Είναι

$$f(x) = x^3 + (\lambda - 1)x^2 + (2\lambda - \mu)x + \kappa \xRightarrow{\text{παραγωγίζουμε}} f'(x) = 3x^2 + 2(\lambda - 1)x + (2\lambda - \mu) \Rightarrow$$

$$\xRightarrow{\text{παραγωγίζουμε}} f''(x) = 6x + 2(\lambda - 1)$$

Οπότε

$$\text{Επειδή } M(1, -2) \in C_f \Rightarrow \boxed{f(1) = -2} \Rightarrow 1^3 + (\lambda - 1) \cdot 1^2 + (2\lambda - \mu) \cdot 1 + \kappa = -2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cancel{1} + \lambda - \cancel{1} + 2\lambda - \mu + \kappa = -2 \Rightarrow 3\lambda - \mu + \kappa = -2 \quad (1)$$

$$\text{Επειδή η } f \text{ έχει σημείο καμπής στο } M(1, -2) \Rightarrow \boxed{f''(1) = 0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6 \cdot 1 + 2(\lambda - 1) = 0 \Rightarrow 3\lambda + 2\beta + \gamma = 0 \Rightarrow 6 + 2\lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda = -2 \quad (2)$$

Επειδή η εφαπτομένη της C_f στο M να είναι παράλληλη προς την ευθεία

$$y = -21x + 1994 \Rightarrow \boxed{f'(1) = -21} \Rightarrow 3 \cdot 1^2 + 2(\lambda - 1) \cdot 1 + (2\lambda - \mu) = -21 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3 + 2\lambda - 2 + 2\lambda - \mu = -21 \Rightarrow 4\lambda - \mu = -22 \quad (3)$$

Λύνοντας το σύστημα των (1), (2) και (3) βρίσκουμε $\kappa = 18$, $\lambda = -2$ και $\mu = 14$

Επαλήθευση

Για $\kappa = 18$, $\lambda = -2$ και $\mu = 14$ είναι

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 18x + 18 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 6x - 18 \Rightarrow f''(x) = 6x - 6 = 6(x - 1)$$

$$\text{Είναι } f''(x) = 0 \Rightarrow x = 1$$

Τα πρόσημα της f'' , και η κυρτότητα της f φαίνονται στον διπλανό πίνακα

Οπότε για $\kappa = 18$, $\lambda = -2$ και $\mu = 14$ παρατηρούμε ότι πράγματι η f παρουσιάζει καμπή στο $x_0 = 1$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f''(x)$	+	0	-
$f(x)$		σ.κ.	

26.9 6)

Έστω $f(x) = ax^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$, μια πολυωνυμική συνάρτηση 3ου βαθμού

Είναι

$$f(x) = ax^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta \xRightarrow{\text{παραγωγίζουμε}} f'(x) = 3ax^2 + 2\beta x + \gamma \Rightarrow$$

παραγωγίζουμε
 $\Rightarrow f''(x) = 6\alpha x + 2\beta$

Οπότε

Επειδή η f μηδενίζεται για $x = 2 \Rightarrow \boxed{f(2) = 0} \Rightarrow \alpha \cdot 2^3 + \beta \cdot 2^2 + \gamma \cdot 2 + \delta = 0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow 8\alpha + 4\beta + 2\gamma + \delta = 0 \quad (1)$

Επειδή η f έχει σημείο καμπής για $x = 1 \Rightarrow \boxed{f''(1) = 0} \Rightarrow 6\alpha \cdot 1 + 2\beta = 0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow 6\alpha + 2\beta = 0 \quad (2)$

Επειδή η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης στο $x = -1$ είναι $y = 10x + 7$

$\Rightarrow \begin{cases} \boxed{f'(-1) = 10} & (\text{λόγω συντελεστή διεύθυνσης}) \\ \boxed{f(-1) = -3} & (\text{επειδή } (-1, f(-1)) \in y = 10x + 7) \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} 3\alpha(-1)^2 + 2\beta(-1) + \gamma = 10 \\ \alpha(-1)^3 + \beta(-1)^2 + \gamma(-1) + \delta = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3\alpha - 2\beta + \gamma = 10 & (3) \\ -\alpha + \beta - \gamma + \delta = -3 & (4) \end{cases}$

Λύνοντας το σύστημα των (1) , (2) , (3) και (4) βρίσκουμε $\alpha = 1$, $\beta = -3$, $\gamma = 1$ και $\delta = 2$

Οπότε η ζητούμενη συνάρτηση είναι η $f(x) = x^3 - 3x^2 + x + 2$, $x \in \mathbb{R}$

Επαλήθευση

Είναι

$f(x) = x^3 - 3x^2 + x + 2 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 6x + 1 \Rightarrow f''(x) = 6x - 6 = 6(x - 1)$

Είναι $f''(x) = 0 \Rightarrow x = 1$

Τα πρόσημα της f'' , και η κυρτότητα της f φαίνονται στον διπλανό πίνακα

Οπότε για $\kappa = 18$, $\lambda = -2$ και $\mu = 14$ παρατηρούμε ότι πράγματι η f παρουσιάζει καμπή στο $x_0 = 1$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f''(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$		$\sigma.κ.$	