

26.6 1)

- α) Η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων με  
 $f'(x) = e^x + 2x \xRightarrow{\text{παραγωγίζουμε}} f''(x) = e^x + 2 \xRightarrow{e^x > 0} \boxed{f''(x) > 0}$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$

Άρα η  $f$  είναι κυρτή στο  $\mathbb{R}$

- β) Είναι  $f(0) = e^0 + 0^2 \Rightarrow f(0) = 1$   
 $f'(x) = e^x + 2x \Rightarrow f'(0) = e^0 + 2 \cdot 0 \Rightarrow f'(0) = 1$

Οπότε η εξίσωση εφαπτομένης της  $C_f$  στο σημείο  $(0, f(0))$

$$y - f(0) = f'(0)(x - 0) \xRightarrow{\substack{f(0)=1 \\ f'(0)=1}} y - 1 = x \Rightarrow \boxed{y = x + 1}$$

- γ) Επειδή η  $f$  είναι κυρτή στο  $\mathbb{R}$  θα βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Οπότε θα βρίσκεται πάνω και από την εφαπτόμενη του προηγούμενου ερωτήματος. Άρα για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  είναι  
 $f(x) \geq x + 1 \Rightarrow \boxed{e^x + x^2 \geq x + 1}$

26.6 2)

- α) Η  $f$  είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο  $(0, +\infty)$  ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων

$$\text{με } f'(x) = e^x - \frac{1}{x} \xRightarrow{\text{παραγωγίζουμε}} f''(x) = e^x + \frac{1}{x^2} \xRightarrow{\substack{e^x > 0 \\ \frac{1}{x^2} > 0}} \boxed{f''(x) > 0} \text{ για κάθε } x \in (0, +\infty)$$

Άρα η  $f$  είναι κυρτή στο  $(0, +\infty)$

- β) Είναι  $f(1) = e^1 - \ln 1 \Rightarrow f(1) = e$   
 $f'(x) = e^x - \frac{1}{x} \Rightarrow f'(1) = e^1 - \frac{1}{1} \Rightarrow f'(1) = e - 1$

Οπότε η εξίσωση εφαπτομένης της  $C_f$  στο σημείο  $(1, f(1))$

$$y - f(1) = f'(1)(x - 1) \xRightarrow{\substack{f(1)=e \\ f'(1)=e-1}} y - e = (e - 1)(x - 1) \Rightarrow y - e = (e - 1)x - e + 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow \boxed{y = (e - 1)x + 1}$$

- γ) Επειδή η  $f$  είναι κυρτή στο  $(0, +\infty)$  θα βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της για κάθε  $x \in (0, +\infty)$ . Οπότε θα βρίσκεται πάνω και από την εφαπτόμενη του προηγούμενου ερωτήματος. Άρα για κάθε  $x \in (0, +\infty)$  είναι  
 $f(x) \geq (e - 1)x + 1 \Rightarrow e^x - \ln x \geq (e - 1)x + 1 \Rightarrow \boxed{e^x \geq (e - 1)x + \ln x + 1}$

26.6 3)

- α) Η  $f$  είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο  $(0, +\infty)$  ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων

$$\text{με } f'(x) = -2x - \ln x - \cancel{x} \cdot \frac{1}{\cancel{x}} \overset{\text{παραγωγίζουμε}}{\Rightarrow} f''(x) = -2 - \frac{1}{x} \overset{x>0}{\Rightarrow} \boxed{f''(x) < 0} \text{ για κάθε } x \in (0, +\infty)$$

Άρα η  $f$  είναι κοίλη στο  $(0, +\infty)$

- β) Είναι  $f(1) = 1 - 1^2 - 1 \ln 1 \Rightarrow f(1) = 0$

$$f'(x) = -2x - \ln x - 1 \Rightarrow f'(1) = -2 \cdot 1 - \ln 1 - 1 \Rightarrow f'(1) = -3$$

Οπότε η εξίσωση εφαπτομένης της  $C_f$  στο σημείο  $(1, f(1))$

$$\overset{f(1)=0}{f'(1)=-3} y - f(1) = f'(1)(x - 1) \Rightarrow y - 0 = -3(x - 1) \Rightarrow \boxed{y = -3x + 3}$$

- γ) Επειδή η  $f$  είναι κοίλη στο  $(0, +\infty)$  θα βρίσκεται κάτω από κάθε εφαπτομένη της για κάθε  $x \in (0, +\infty)$ . Οπότε θα βρίσκεται κάτω και από την εφαπτόμενη του προηγούμενου ερωτήματος. Άρα για κάθε  $x \in (0, +\infty)$  είναι

$$f(x) \leq -3x + 3 \Rightarrow 1 - x^2 - x \ln x \leq -3x + 3 \Rightarrow \boxed{x^2 + x \ln x \geq 3x - 2}$$

## 26.6 4)

- α) Η  $f$  είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων

$$\begin{aligned} \text{με } f'(x) &= \frac{e^x}{1+e^x} \overset{\text{παραγωγίζουμε}}{\Rightarrow} f''(x) = \frac{e^x(1+e^x) - e^x \cdot e^x}{(1+e^x)^2} \Rightarrow \\ \Rightarrow f''(x) &= \frac{e^x + \cancel{e^{2x}} - \cancel{e^{2x}}}{(1+e^x)^2} \Rightarrow f''(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2} \Rightarrow f''(x) > 0, \text{ για κάθε } x \in (0, +\infty) \end{aligned}$$

Άρα η  $f$  είναι κυρτή στο  $(0, +\infty)$

- β) Είναι  $f(0) = \ln(e^0 + 1) = \ln 2$

$$f'(0) = \frac{e^0}{1+e^0} \Rightarrow f'(0) = \frac{1}{2}$$

Οπότε η εξίσωση εφαπτομένης της  $C_f$  στο σημείο  $(0, f(0))$

$$\overset{f(0)=\ln 2}{f'(0)=\frac{1}{2}} y - f(0) = f'(0)(x - 0) \Rightarrow y - \ln 2 = \frac{1}{2}x \Rightarrow \boxed{y = \frac{1}{2}x + \ln 2}$$

- γ) Επειδή η  $f$  είναι κυρτή στο  $\mathbb{R}$  θα βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Οπότε θα βρίσκεται πάνω και από την εφαπτόμενη του προηγούμενου ερωτήματος. Άρα για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  είναι

$$f(x) \geq \frac{1}{2}x + \ln 2 \Rightarrow \ln(e^x + 1) \geq \frac{1}{2}x + \ln 2 \Rightarrow \ln(e^x + 1) - \ln 2 \geq \frac{1}{2}x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\ln\left(\frac{e^x+1}{2}\right) \geq \frac{x}{2}}$$