

26.4 1)

- α) Η f είναι ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων και για κάθε $x \in (0, +\infty)$ είναι

$$f'(x) = \ln x + \frac{x+2}{x} = \ln x + 1 + \frac{2}{x} \quad \text{και} \quad f''(x) = \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} = \frac{x-2}{x^2}$$

Τα πρόσημα της f'' , η κυρτότητα και τα σημεία καμπής της f φαίνονται στον διπλανό πίνακα

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$f''(x)$			- 0 +	
$f(x)$			σ.κ.	

Οπότε η f είναι

κοίλη στο $(0, 2]$ κυρτή στο $[2, +\infty)$ και έχει σημείο καμπής στο $(2, 4\ln 2)$

- β) Η f είναι ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων και για κάθε $x \in (0, +\infty)$ είναι

$$f'(x) = \frac{2\ln x}{x} \quad \text{και} \quad f''(x) = \frac{2 \cdot \frac{1}{x} - 2\ln x}{x^2} = \frac{2 - 2\ln x}{x^2} = \frac{2(1 - \ln x)}{x^2}$$

Τα πρόσημα της f'' , η κυρτότητα και τα σημεία καμπής της f φαίνονται στον διπλανό πίνακα

x	$-\infty$	0	e	$+\infty$
$f''(x)$			+ 0 -	
$f(x)$			σ.κ.	

Οπότε η f είναι

κυρτή στο $(0, e]$ κοίλη στο $[e, +\infty)$ και έχει σημείο καμπής στο $(e, 1)$

26.4 2)

Η f είναι ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2}$$

Προφανώς είναι $f''(x) < 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$ άρα η f είναι κοίλη στο διάστημα $(0, +\infty)$

και βέβαια δεν παρουσιάζει σημείο καμπής

26.4 3)

Η f είναι ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f'(x) = \frac{4 \cdot 2x}{x^2 + 4} = \frac{8x}{x^2 + 4}$$

$$f''(x) = \frac{8(x^2 + 4) - 8x \cdot 2x}{(x^2 + 4)^2} = \frac{8x^2 + 32 - 16x^2}{(x^2 + 4)^2} = \frac{32 - 8x^2}{(x^2 + 4)^2} = \frac{8(4 - x^2)}{(x^2 + 4)^2}$$

Το πρόσημο της f'' φαίνεται στον παρακάτω πίνακα (επειδή $(x^2 + 4)^2 > 0$ το πρόσημο καθορίζεται από το $4 - x^2$)

x	$-\infty$	-2		2	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+	0	-
f(x)					

Δηλαδή η f είναι

κοίλη στο διάστημα $(-\infty, -2]$

κυρτή στο διάστημα $[-2, 2]$

κοίλη στο διάστημα $[0, +\infty)$

και παρουσιάζει σημείο καμπής

στο $(-2, f(-2) = 4 \ln((-2)^2 + 4) = 4 \ln 8 = 4 \ln 2^3 = 12 \ln 2)$ δηλαδή στο $(-2, 12 \ln 2)$

στο $(2, f(2) = 4 \ln(2^2 + 4) = 4 \ln 8 = 4 \ln 2^3 = 12 \ln 2)$ δηλαδή στο $(2, 12 \ln 2)$

26.4 4)

Η f είναι ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ ως πράξεις

παραγωγίσιμων συναρτήσεων και για κάθε $x \in (0, +\infty)$ είναι

$$f'(x) = 2x - \frac{8}{x} \quad \text{και} \quad f''(x) = 2 - \frac{8}{x^2} = \frac{2x^2 - 8}{x^2} = \frac{2(x^2 - 4)}{x^2} = \frac{2(x-2)(x+2)}{x^2}$$

Τα πρόσημα της f'' , η κυρτότητα και τα σημεία καμπής της f φαίνονται στον διπλανό πίνακα

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
$f''(x)$			-	0	+
f(x)					

Οπότε η f είναι

κοίλη στο $(0, 2]$ κυρτή στο $[2, +\infty)$ και έχει σημείο καμπής στο

$(2, f(2) = 4 + 8 \ln 2)$

26.4 5)

Η f είναι ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ ως πράξεις

παραγωγίσιμων συναρτήσεων και για κάθε $x \in (0, +\infty)$ είναι

$$f'(x) = 2 \ln x + 2 \cancel{x} \frac{1}{\cancel{x}} - 2x - 2 = 2 \ln x + \cancel{2} - 2x - \cancel{2} = 2 \ln x - 2x \quad \text{και}$$

$$f''(x) = \frac{2}{x} - 2 = \frac{2 - 2x}{x} = \frac{2(1-x)}{x}$$

Τα πρόσημα της f'' , η κυρτότητα και τα σημεία καμπής της f φαίνονται στον διπλανό πίνακα

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
$f''(x)$			+	0	-
f(x)					

Οπότε η f είναι

κυρτή στο $(0, 1]$ κοίλη στο $[1, +\infty)$ και έχει σημείο καμπής στο $(1, f(1) = -3)$

26.4 6)

Η f είναι ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ ως πράξεις

παραγωγίσιμων συναρτήσεων και για κάθε $x \in (0, +\infty)$ είναι

$$f'(x) = \frac{4}{x+1} - \frac{1}{x} \quad \text{και}$$

$$f''(x) = -\frac{4}{(x+1)^2} + \frac{1}{x^2} = \frac{-4x^2 + (x+1)^2}{x^2(x+1)^2} = \frac{-4x^2 + x^2 + 2x + 1}{x^2(x+1)^2} =$$

$$= \frac{-3x^2 + 2x + 1}{x^2(x+1)^2} = \frac{-(x-1)(3x+1)}{x^2(x+1)^2}$$

Τα πρόσημα της f'' , η κυρτότητα και τα σημεία καμπής της f φαίνονται στον διπλανό πίνακα

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
$f''(x)$			+	0	-
$f(x)$				$\sigma.K.$	

Οπότε η f είναι

κυρτή στο $(0,1]$ κοίλη στο $[1,+\infty)$ και έχει σημείο καμπής στο $(1, f(1) = 4\ln 2)$

26.4 7)

Η f είναι ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων και για κάθε $x \in (0, +\infty)$ είναι

$$f'(x) = \frac{2\ln x}{x} + \frac{2}{x} + 1 \quad \text{και} \quad f''(x) = \frac{2\frac{1}{x} - 2\ln x}{x^2} - \frac{2}{x^2} = \frac{\cancel{2} - 2\ln x - \cancel{2}}{x^2} = \frac{-2\ln x}{x^2}$$

Τα πρόσημα της f'' , η κυρτότητα και τα σημεία καμπής της f φαίνονται στον διπλανό πίνακα

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
$f''(x)$			+	0	-
$f(x)$				$\sigma. \kappa.$	

Οπότε η f είναι

κυρτή στο $(0,1]$, κοίλη στο $[1,+\infty)$ και έχει σημείο καμπής στο $(1, f(1) = 1)$

26.4 8)

Η f είναι ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0,1) \cup (1,+\infty)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων και για κάθε $x \in (0, +\infty)$ είναι

$$f'(x) = \frac{\ln x - \cancel{\frac{1}{x}}}{\ln^2 x} = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x} \quad \text{και}$$

$$f''(x) = \frac{\frac{1}{x} \ln^2 x - (\ln x - 1)2 \frac{\ln x}{x}}{\ln^4 x} = \frac{\frac{\ln^2 x}{x} - \frac{2\ln^2 x + 2\ln x}{x}}{\ln^4 x} = \frac{-\ln^2 x + 2\ln x}{x \ln^4 x} =$$

$$= \frac{-\ln x (\ln x - 2)}{x \ln^4 x}$$

Τα πρόσημα της f'' , η κυρτότητα και τα σημεία καμπής της f φαίνονται στον διπλανό πίνακα

x	$-\infty$	0	1	e^2	$+\infty$	
$f''(x)$			-	+	0	-
$f(x)$					σ_K	

Οπότε η f είναι

κοίλη στο $(0,1)$, κυρτή στο $(1, e^2]$, κοίλη στο $[e^2, +\infty)$ και έχει σημείο καμπής

στο $(e^2, f(e^2) = \frac{e^2}{2})$