

Είναι

$$f'''(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f''(x) - f''(x_0)}{x - x_0} \stackrel{f''(x_0)=0}{=} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f''(x)}{x - x_0}$$

Επειδή $f'''(x_0) > 0$. Τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f''(x)}{x - x_0} > 0$

Άρα και για τα πλευρικά όρια θα ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f''(x)}{x - x_0} > 0 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f''(x)}{x - x_0} > 0$$

Όμως

όταν $x \rightarrow x_0^-$ είναι $x - x_0 < 0$ οπότε συμπεραίνουμε ότι «πριν» το x_0 είναι

$$f''(x) < 0$$

Άρα «πριν» το x_0 η f είναι κοίλη

ενώ

όταν $x \rightarrow x_0^+$ είναι $x - x_0 > 0$ οπότε συμπεραίνουμε ότι «μετά» x_0 είναι $f''(x) > 0$

Άρα «μετά» το x_0 η f είναι κυρτή

Οπότε η f αλλάζει την κυρτότητα εκατέρωθεν του x_0 (και φυσικά είναι παραγωγίσιμη στο x_0) άρα στο x_0 έχει σημείο καμψής