26.36

Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο R με

$$f'(x)=\frac{x\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x}{x^2}$$

$$f''(x)=\frac{\left(\cancel{\sigma\upsilon\nu x}-x\eta\mu x-\cancel{\sigma\upsilon\nu x}\right)x^2-2x\left(x\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x\right)}{x^4}=\frac{-x^3\eta\mu x-2x^2\sigma\upsilon\nu x+2x\eta\mu x}{x^4}=$$

$$=\frac{x\left(-x^2\eta\mu x-2x\sigma\upsilon\nu x+2\eta\mu x\right)}{x^4}$$

Αν λοιπόν η f έχει σημείο καμπής στο $\left(x_o,f\left(x_o\right)\right)$, $x_o\neq 0$, θα είναι

$$f''(x_o)=0\Rightarrow\frac{x_o\left(-x_o^2\eta\mu x_o-2x_o\sigma\upsilon\nu x_o+2\eta\mu x_o\right)}{x_o^4}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x_o^2\eta\mu x_o-2x_o\sigma\upsilon\nu x_o+2\eta\mu x_o=0\overset{\text{διαιρούμε με } \eta\mu x_o\neq 0}{\Rightarrow} -x_o^2-2x_o\sigma\varphi x_o+2=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x_o^2+2=2x_o\sigma\varphi x_o\overset{x_o\neq 0}{\Rightarrow}\sigma\varphi x_o=\frac{-x_o^2+2}{2x_o}$$

Αρκεί τώρα να αποδείξουμε ότι το σημείο $A\left(x_o,f\left(x_o\right)\right)$ ικανοποιεί την εξίσωση $y^2=\frac{4}{4+x^4}$, δηλαδή να αποδείξουμε ότι $\boxed{f^2\left(x_o\right)=\frac{4}{4+x_o^4}}$. Πράγματι

$$f^2\left(x_o\right)=\frac{4}{4+x_o^4}\overset{f(x_o)=\frac{\eta\mu x_o}{x_o}}{\Leftrightarrow}\left(\frac{\eta\mu x_o}{x_o}\right)^2=\frac{4}{4+x_o^4}\Leftrightarrow\frac{\eta\mu^2x_o}{x_o^2}=\frac{4}{4+x_o^4}\Leftrightarrow\eta\mu^2x_o=\frac{4x_o^2}{4+x_o^4}\Leftrightarrow$$

$$\overset{\eta\mu^2x_o=\frac{\varepsilon\varphi^2x_o}{1+\varepsilon\varphi^2x_o}}{\Leftrightarrow}\frac{\varepsilon\varphi^2x_o}{1+\varepsilon\varphi^2x_o}=\frac{4x_o^2}{4+x_o^4}\Leftrightarrow\left(4+x_o^4\right)\varepsilon\varphi^2x_o=4x_o^2\left(1+\varepsilon\varphi^2x_o\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4\varepsilon\varphi^2x_o+x_o^4\varepsilon\varphi^2x_o=4x_o^2+4x_o^2\varepsilon\varphi^2x_o$$
$$\Leftrightarrow 4\varepsilon\varphi^2x_o+x_o^4\varepsilon\varphi^2x_o-4x_o^2\varepsilon\varphi^2x_o=4x_o^2\Leftrightarrow 4\varepsilon\varphi^2x_o+x_o^4\varepsilon\varphi^2x_o-4x_o^2\varepsilon\varphi^2x_o=4x_o^2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(4+x_o^4-4x_o^2\right)\varepsilon\varphi^2x_o=4x_o^2\Leftrightarrow\varepsilon\varphi^2x_o=\frac{4x_o^2}{4+x_o^4-4x_o^2}\Leftrightarrow\frac{1}{\varepsilon\varphi^2x_o}=\frac{4+x_o^4-4x_o^2}{4x_o^2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sigma\varphi^2x=\frac{4+x_o^4-4x_o^2}{4x_o^2}\quad\text{που ισχύει (αφού } \sigma\varphi x_o=\frac{2-x_o^2}{2x_o}\text{)}$$