

26.35

α) Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$f'(x) = -\frac{2\lambda^4 x}{(x^2 + 3\lambda^2)^2}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{2\lambda^4 (x^2 + 3\lambda^2)^2 - 2\lambda^4 x \cdot 2(x^2 + 3\lambda^2) \cdot 2x}{(x^2 + 3\lambda^2)^4} = \\ &= \frac{2\lambda^4 \cancel{(x^2 + 3\lambda^2)} (x^2 + 3\lambda^2 - 4x^2)}{(x^2 + 3\lambda^2)^4} = \frac{2\lambda^4 (3\lambda^2 - 3x^2)}{(x^2 + 3\lambda^2)^3} = \frac{6\lambda^4 (\lambda^2 - x^2)}{(x^2 + 3\lambda^2)^3} \end{aligned}$$

$$\text{Είναι } f''(x) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \lambda \text{ ή } x = -\lambda$$

Το πρόσημο της f'' φαίνεται στον παρακάτω πίνακα (επειδή $x^2 + 3\lambda^2 > 0$ και $6\lambda^4 > 0$ το πρόσημο καθορίζεται από το $\lambda^2 - x^2$)

x	$-\infty$	$-\lambda$		λ	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	$\emptyset$	$+$	$\emptyset$	$-$
$f(x)$		σημείο καμπής		σημείο καμπής	

Άρα η f έχει σημείο καμπής στο

$$A(-\lambda, f(-\lambda)) = A\left(-\lambda, \frac{(-\lambda)^4}{(-\lambda)^2 + 3\lambda^2}\right) = A\left(-\lambda, \frac{\lambda^4}{4\lambda^2}\right) = A\left(-\lambda, \frac{1}{4}\lambda^2\right)$$

και στο

$$B(\lambda, f(\lambda)) = B\left(\lambda, \frac{\lambda^4}{\lambda^2 + 3\lambda^2}\right) = B\left(\lambda, \frac{\lambda^4}{4\lambda^2}\right) = B\left(\lambda, \frac{1}{4}\lambda^2\right)$$

Τα σημεία καμπής προφανώς ανήκουν στην παραβολή $y = \frac{1}{4}x^2$

β) Πρέπει να είναι

$$\begin{aligned} f'(-\lambda) &= -\frac{2\lambda^4(-\lambda)}{((- \lambda)^2 + 3\lambda^2)^2} = -\frac{2\lambda^5(-\lambda)}{16\lambda^4} = \frac{\lambda}{8} \\ f'(\lambda) &= -\frac{2\lambda^4 \cdot \lambda}{(\lambda^2 + 3\lambda^2)^2} = -\frac{2\lambda^5 \cdot \lambda}{16\lambda^4} = -\frac{\lambda}{8} \\ \boxed{f'(-\lambda)f'(\lambda) = -1} &\quad \Rightarrow \quad -\frac{\lambda}{8} \cdot \frac{\lambda}{8} = -1 \Rightarrow \lambda^2 = 64 \stackrel{\lambda > 0}{\Rightarrow} \boxed{\lambda = 8} \end{aligned}$$