

Επειδή η συνάρτηση  $f$  ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο  $[α, β]$  είναι συνεχής στο  $[α, β]$ , ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων είναι παραγωγίσιμη στο  $(α, β)$ , ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων  $f(α) = f(β)$

Οπότε από το θεώρημα Rolle στο διάστημα  $[α, β]$  συμπεραίνουμε ότι υπάρχει  $ξ ∈ (α, β)$  τέτοιο ώστε  $f'(ξ) = 0$

Επειδή η  $f$  είναι κυρτή στο  $[α, β]$  η  $f'$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $[α, β]$

Οπότε

$$\text{για κάθε } x \in (α, ξ) \Rightarrow x < ξ \xRightarrow{f' \nearrow} f'(x) < f'(ξ) \xRightarrow{f'(ξ)=0} f'(x) < 0$$

και

$$\text{για κάθε } x \in (ξ, β) \Rightarrow x > ξ \xRightarrow{f' \nearrow} f'(x) > f'(ξ) \xRightarrow{f'(ξ)=0} f'(x) > 0$$

Άρα

η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $[α, ξ]$

η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $[ξ, β]$

Ισχύει δηλαδή ο παρακάτω πίνακας μονοτονίας

| x       | $-\infty$ | α      | ξ | β      | $+\infty$ |
|---------|-----------|--------|---|--------|-----------|
| $f'(x)$ |           | -      | 0 | +      |           |
| f(x)    |           | $f(α)$ |   | $f(α)$ |           |

Άρα

$$\text{για κάθε } x \in (α, ξ] \Rightarrow x > α \xRightarrow{f \searrow} f(x) < f(α) \quad (1)$$

$$\text{για κάθε } x \in [ξ, β) \Rightarrow x < β \xRightarrow{f \nearrow} f(x) < f(β) \xRightarrow{f(α)=f(β)} f(x) < f(α) \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow f(x) < f(α) \quad \text{για κάθε } x \in (α, β)$$