

Η συνάρτηση f
είναι συνεχής στο διάστημα $[α, γ]$,
είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(α, γ)$

Οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει $ξ_1 ∈ (α, γ)$, τέτοιο ώστε

$$f'(ξ_1) = \frac{f(γ) - f(α)}{γ - α} \stackrel{f(γ)=0}{\Rightarrow} f'(ξ_1) = \frac{-f(α)}{γ - α} \quad (1)$$

Ακόμη η συνάρτηση f
είναι συνεχής στο διάστημα $[γ, β]$,
είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(γ, β)$

Οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει $ξ_2 ∈ (γ, β)$, τέτοιο ώστε

$$f'(ξ_2) = \frac{f(β) - f(γ)}{β - γ} \stackrel{f(γ)=0}{\Rightarrow} f'(ξ_2) = \frac{f(β)}{β - γ} \quad (2)$$

Επειδή η f στρέφει τα κοίλα άνω στο $[α, β]$ συμπεραίνουμε ότι η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $[α, β]$ οπότε

$$ξ_1 < ξ_2 \stackrel{f' \nearrow}{\Rightarrow} f'(ξ_1) < f'(ξ_2) \stackrel{(1),(2)}{\Rightarrow} \frac{-f(α)}{γ - α} < \frac{f(β)}{β - γ} \Rightarrow \boxed{0 < \frac{f(β)}{β - γ} + \frac{f(α)}{γ - α}}$$