

α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων

$$\mu\epsilon \quad f'(x) = (x^x)' = (e^{\ln x^x})' = (e^{x \ln x})' = e^{x \ln x} (\ln x + 1) \quad \xrightarrow{\text{παραγωγίζουμε}}$$

$$\Rightarrow f''(x) = e^{x \ln x} (\ln x + 1)^2 + e^{x \ln x} \frac{1}{x} \quad \xrightarrow{\begin{matrix} e^{x \ln x} > 0 \\ (\ln x + 1)^2 > 0 \\ \frac{1}{x} > 0 \end{matrix}} \Rightarrow f''(x) > 0, \text{ για κάθε } x \in (0, +\infty)$$

Άρα η f είναι κυρτή στο $(0, +\infty)$

Ακόμη

Η g είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων

$$\mu\epsilon \quad g'(x) = \frac{1}{x} \quad \xrightarrow{\text{παραγωγίζουμε}} \quad g''(x) = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow \boxed{g''(x) < 0} \quad \text{για κάθε } x \in (0, +\infty)$$

Άρα η g είναι κοίλη στο $(0, +\infty)$

β) Είναι $f(1) = 1^1 = 1$

$$f'(1) = e^{1 \ln 1} (\ln 1 + 1) = 1$$

Οπότε η εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο σημείο $(1, f(1))$

$$y - f(1) = \overset{\begin{matrix} f(1)=1 \\ f'(1)=1 \end{matrix}}{f'(1)}(x - 1) \Rightarrow y - 1 = 1(x - 1) \Rightarrow y - 1 = x - 1 \Rightarrow y = x$$

Ακόμη $g(1) = 1 + \ln 1 = 1$

$$g'(1) = \frac{1}{1} = 1$$

Οπότε η εξίσωση εφαπτομένης της C_g στο σημείο $(1, g(1))$

$$y - g(1) = \overset{\begin{matrix} g(1)=1 \\ g'(1)=1 \end{matrix}}{g'(1)}(x - 1) \Rightarrow y - 1 = 1(x - 1) \Rightarrow y - 1 = x - 1 \Rightarrow y = x$$

Οπότε οι C_f και C_g έχουν κοινή εφαπτόμενη στο σημείο $(1, 1)$ άρα εφάπτονται στο σημείο αυτό

γ) Επειδή η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$ θα βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της για κάθε $x \in (0, +\infty)$. Οπότε θα βρίσκεται πάνω και από την εφαπτόμενη του προηγούμενου ερωτήματος. Άρα για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f(x) \geq x$ (1)

Ακόμη επειδή η g είναι κοίλη στο $(0, +\infty)$ θα βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της για κάθε $x \in (0, +\infty)$. Οπότε θα βρίσκεται κάτω και από την εφαπτόμενη του προηγούμενου ερωτήματος. Άρα για κάθε $x \in (0, +\infty)$ είναι $g(x) \leq x$ (2)

Άρα

$$(1),(2) \Rightarrow f(x) \geq g(x) \Rightarrow \boxed{x^x \geq 1 + \ln x}, \text{ για κάθε } x \in (0, +\infty)$$