Γ ΛΥΚΕΙΟΥ ΜΕΡΟΣ Β

26.25

α) Έχουμε

$$f(x)=x+\ln(f(x))\overset{\text{παραγωγίζουμε}}{\Rightarrow} f'(x)=1+\frac{f'(x)}{f(x)}\Rightarrow f(x)f'(x)=f(x)+f'(x)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x)f'(x)-f'(x)=f(x)\Rightarrow f'(x)\left[f(x)-1\right]=f(x)\overset{f(x)<1\Rightarrow f(x)-1\neq 0}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{f(x)}{f(x)-1}\overset{\substack{f(x)>0\\ f(x)<1\Rightarrow f(x)-1<0}}{\Rightarrow}\boxed{f'(x)<0}\text{ , για κάθε } x\in R$$

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο R

β) $$f'(x)=\frac{f(x)}{f(x)-1}\overset{\text{παραγωγίζουμε}}{\Rightarrow} f''(x)=\frac{f'(x)\left[f(x)-1\right]-f(x)f'(x)}{\left[f(x)-1\right]^2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f''(x)=\frac{\cancel{f'(x)f(x)}-f'(x)-\cancel{f(x)f'(x)}}{\left[f(x)-1\right]^2}\Rightarrow f''(x)=\frac{-f'(x)}{\left[f(x)-1\right]^2}\overset{f'(x)<0}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \boxed{f''(x)>0}\text{ , για κάθε } x\in R$$

Άρα η f είναι κυρτή στο R