

α) Έχουμε

$$e^{f(x)} + f(x) = x \xRightarrow{\text{παραγωγίζουμε}} e^{f(x)} f'(x) + f'(x) = 1 \Rightarrow f'(x) [e^{f(x)} + 1] = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{e^{f(x)} + 1} \xRightarrow{e^{f(x)} + 1 > 0} \boxed{f'(x) > 0} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}. \text{ Άρα η } f \text{ είναι γνησίως}$$

αύξουσα στο $\mathbb{R}$

$$\beta) f'(x) = \frac{1}{e^{f(x)} + 1} \xRightarrow{\text{παραγωγίζουμε}} f''(x) = -\frac{1}{(e^{f(x)} + 1)^2} \cdot e^{f(x)} f'(x) \Rightarrow$$

$$\begin{matrix} (e^{f(x)} + 1)^2 < 0 \\ e^{f(x)} > 0 \\ f'(x) > 0 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{f''(x) < 0}, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Άρα η f είναι κοίλη στο $\mathbb{R}$