

26.23

α) Επειδή η f είναι άρτια για κάθε $x \in \mathbb{R}$ θα ισχύει $f(-x) = f(x)$, οπότε

$$f(-x) = f(x) \xrightarrow{\text{παραγωγίζουμε}} -f'(-x) = f'(x) \Rightarrow f'(-x) = -f'(x), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ που}$$

σημαίνει ότι η f' είναι περιττή συνάρτηση

β) Επειδή η f στρέφει τα κοίλα άνω στο διάστημα $[0, +\infty)$ σημαίνει ότι η f' είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0, +\infty)$

Εμείς τώρα πρέπει να αποδείξουμε ότι η f' είναι γνησίως αύξουσα και στο διάστημα $(-\infty, 0)$

Πράγματι έστω $x_1, x_2 \in (-\infty, 0)$ με $x_1 < x_2 < 0$. Έχουμε

$$\boxed{x_1 < x_2} < 0 \Rightarrow -x_1 > -x_2 > 0 \xrightarrow{f' \nearrow} f'(-x_1) > f'(-x_2) \xrightarrow{f' \text{ περιττή}} -f'(x_1) > -f'(x_2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{f'(x_1) < f'(x_2)}$$

που σημαίνει ότι η f' είναι γνησίως αύξουσα και στο διάστημα $(-\infty, 0)$, άρα η f στρέφει τα κοίλα άνω και στο διάστημα $(-\infty, 0]$