

26.2 1)

- α) Η f έχει πεδίο ορισμού το $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$. Είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$ ως ρητή και για κάθε $x \in (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$ είναι

$$f'(x) = \frac{\cancel{x} - 2 - \cancel{x}}{(x-2)^2} = \frac{-2}{(x-2)^2} \quad \text{και} \quad f''(x) = \frac{2}{(x-2)^3} \cdot 2(\cancel{x-2}) = \frac{4}{(x-2)^3}$$

Τα πρόσημα της f'' , η κυρτότητα και τα σημεία καμπής της f φαίνονται στον διπλανό πίνακα

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f''(x)$	-		+
f(x)			

Οπότε η f είναι

κοίλη στο $(-\infty, 2)$ κυρτή στο $(2, +\infty)$ και δεν παρουσιάζει σημεία καμπής

- β) Η f έχει πεδίο ορισμού το $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ ως ρητή και για κάθε $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ είναι

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x(x-1)}{x^4} = \frac{2x - x^2}{x^4} = \frac{2-x}{x^3} \quad \text{και}$$

$$f''(x) = \frac{-x^3 - 3x^2(2-x)}{x^6} = \frac{\cancel{x^2}(-x-6+3x)}{x^4} = \frac{2(x-3)}{x^4}$$

Είναι $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 3$

Τα πρόσημα της f'' , η κυρτότητα και τα σημεία καμπής της f φαίνονται στον διπλανό πίνακα

x	$-\infty$	0	3	$+\infty$
$f''(x)$	-		- 0 +	
f(x)			 σ.κ.	

Οπότε η f είναι

κοίλη στο $(-\infty, 0)$ κοίλη στο $(0, 3]$ κυρτή στο $[3, +\infty)$

και παρουσιάζει σημείο καμπής στο $\left(3, f(3) = \frac{2}{9}\right)$ δηλαδή στο $\left(3, \frac{2}{9}\right)$

26.2 2)

- Η f έχει πεδίο ορισμού το $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ ως ρητή με

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} \quad \text{και} \quad f''(x) = \frac{1}{x^3} \cdot 2\cancel{x} = \frac{2}{x^3} \neq 0 \quad \text{για κάθε } x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$$

Τα πρόσημα της f'' , η κυρτότητα και τα σημεία καμπής της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	-		+
f(x)			

Οπότε η f είναι

κοίλη στο $(-\infty, 0)$

κυρτή στο $(0, +\infty)$

και δεν παρουσιάζει σημείο καμπής

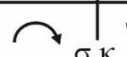
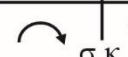
26.2 3)

Η f έχει πεδίο ορισμού το $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ ως ρητή και για κάθε $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ είναι

$$f'(x) = \frac{4x^4 - (x^4 - 3)}{x^2} = \frac{4x^4 - x^4 + 3}{x^2} = \frac{3x^4 + 3}{x^2} \quad \text{και}$$

$$f''(x) = \frac{12x^5 - 2x(3x^4 + 3)}{x^4} = \frac{12x^5 - 6x^5 - 6x}{x^4} = \frac{6x^5 - 6x}{x^4} = \frac{6x(x^4 - 1)}{x^4} = \frac{6x(x-1)(x+1)(x^2+1)}{x^4}$$

Τα πρόσημα της f'' , η κυρτότητα και τα σημεία καμπής της f φαίνονται στον διπλανό πίνακα

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	
$f''(x)$	-	0	+	-	0	+
$f(x)$						

Οπότε η f είναι

κοίλη στο $(-\infty, -1]$, κυρτή στο $[-1, 0)$, κοίλη στο $(0, 1]$ και κυρτή στο $[1, +\infty)$

και παρουσιάζει σημεία καμπής στα

$(-1, f(-1))$ δηλαδή στο $(-1, 2)$

και

$(1, f(1))$ δηλαδή στο $(1, -2)$

26.2 4)

Η f έχει πεδίο ορισμού το $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ ως ρητή και για κάθε $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ είναι

$$f'(x) = \frac{(2x+3)x^2 - 2x(x^2+3x-1)}{x^4} = \frac{\cancel{2x^3} + 3x^2 - \cancel{2x^3} - 6x^2 + 2x}{x^4} = \frac{-3x^2 + 2x}{x^4} = \frac{\cancel{x}(-3x+2)}{x^{\cancel{4}^3}} = \frac{-3x+2}{x^3}$$

και

$$f''(x) = \frac{-3x^3 - 3x^2(-3x+2)}{x^6} = \frac{-3x^3 + 9x^3 - 6x^2}{x^6} = \frac{6x^3 - 6x^2}{x^6} = \frac{6x^{\cancel{3}}(x-1)}{x^{\cancel{6}^4}} = \frac{6(x-1)}{x^4}$$

Τα πρόσημα της f'' , η κυρτότητα και τα σημεία καμπής της f φαίνονται στον διπλανό πίνακα

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f''(x)$	-	-	0	+
$f(x)$				

Οπότε η f είναι

κοίλη στο $(-\infty, 0)$, κοίλη στο $(0, 1]$ και κυρτή στο $[1, +\infty)$

και παρουσιάζει σημείο καμπής

στο $(1, f(1) = 3)$ δηλαδή στο $(1, 3)$

26.2 5)

Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως ρητή και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι

$$f'(x) = \frac{x^2 + 3 - 2x^2}{(x^2 + 3)^2} = \frac{3 - x^2}{(x^2 + 3)^2} \quad \text{και} \quad f''(x) = \frac{-2x(x^2 + 3)^2 - (3 - x^2)4x(x^2 + 3)}{(x^2 + 3)^4} =$$

$$= \frac{2x(x^2 + 3)[-x^2 - 3 - 2(3 - x^2)]}{(x^2 + 3)^4} = \frac{2x(x^2 + 3)(-x^2 - 3 - 6 + 2x^2)}{(x^2 + 3)^4} =$$

$$= \frac{2x(x^2 + 3)(x^2 - 9)}{(x^2 + 3)^4} = \frac{2x(x^2 + 3)(x - 3)(x + 3)}{(x^2 + 3)^4}$$

Τα πρόσημα της f'' , η κυρτότητα και τα σημεία καμπής της f φαίνονται στον διπλανό πίνακα

x	$-\infty$	-3		0		3	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$							
		σ.κ.		σ.κ.		σ.κ.	

Οπότε η f είναι

κοίλη στο $(-\infty, -3]$, κυρτή στο $[-3, 0]$, κοίλη στο $[0, 3]$ και κυρτή στο $[3, +\infty)$

και παρουσιάζει σημεία καμπής

στο $\left(-3, f(-3) = -\frac{1}{4}\right)$ δηλαδή στο $\left(-3, -\frac{1}{4}\right)$

στο $(0, f(0) = 0)$ δηλαδή στο $(0, 0)$

και στο $\left(3, f(3) = \frac{1}{4}\right)$ δηλαδή στο $\left(3, \frac{1}{4}\right)$

26.2 6)

Η f έχει πεδίο ορισμού το $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$. Είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$ ως ρητή με

$$f'(x) = \frac{1 - x^2 - x \cdot (-2x)}{(1 - x^2)^2} = \frac{1 + x^2}{(1 - x^2)^2} \quad \text{και}$$

$$f''(x) = \frac{2x(1 - x^2)^2 - (1 + x^2)2(1 - x^2)(-2x)}{(1 - x^2)^4} = \frac{2x(1 - x^2)^2 + 4x(1 + x^2)(1 - x^2)}{(1 - x^2)^4} =$$

$$= \frac{2x(1 - x^2)^2 + 4x(1 + x^2)(1 - x^2)}{(1 - x^2)^4} = \frac{2x(1 - x^2)[1 - x^2 + 2(1 + x^2)]}{(1 - x^2)^4} =$$

$$= \frac{2x(1 - x^2)(3 + x^2)}{(1 - x^2)^4}$$

για κάθε $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$

Τα πρόσημα της f'' , η κυρτότητα και τα σημεία καμπής της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$
$f''(x)$	+		-	0	+		-
$f(x)$							
			σημείο καμπής				

Οπότε η f είναι

κυρτή στο $(-\infty, 2)$

κοίλη στο $(-1, 0]$

κυρτή στο $[0, 1)$

κοίλη στο $(1, +\infty)$

και παρουσιάζει σημείο καμπής

στο $(0, f(0) = 0)$ δηλαδή στο $(0, 0)$

26.2 7)

Ο παρονομαστής έχει ρίζες τις $x_1 = 1$ και $x_2 = 3$. Οπότε η f έχει πεδίο ορισμού το

$(-\infty, 1) \cup (1, 3) \cup (3, +\infty)$. Είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο

$(-\infty, 1) \cup (1, 3) \cup (3, +\infty)$ ως ρητή με

$$f'(x) = \frac{-(x^2 - 4x + 3) - (2 - x)(2x - 4)}{(x^2 - 4x + 3)^2} = \frac{-x^2 + \cancel{4x} - 3 - \cancel{4x} + 8 + 2x^2 - 4x}{(x^2 - 4x + 3)^2} =$$
$$= \frac{x^2 - 4x + 5}{(x^2 - 4x + 3)^2}$$

$$\text{και } f''(x) = \frac{(2x - 4)(x^2 - 4x + 3) - (2x - 4)(x^2 - 4x + 5)}{(x^2 - 4x + 3)^4} =$$
$$= \frac{(2x - 4)[(x^2 - 4x + 3) - (x^2 - 4x + 5)]}{(x^2 - 4x + 3)^4} =$$
$$= \frac{(2x - 4)(\cancel{x^2} - \cancel{4x} + 3 - \cancel{x^2} + \cancel{4x} - 5)}{(x^2 - 4x + 3)^4} = \frac{-4(x - 2)}{(x^2 - 4x + 3)^4}$$

για κάθε $x \in (-\infty, 1) \cup (1, 3) \cup (3, +\infty)$

Τα πρόσημα της f'' , η κυρτότητα και τα σημεία καμπής της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$
$f''(x)$	+		+ 0 -		-
f(x)			 σ.κ. 		

Οπότε η f είναι

κυρτή στο $(-\infty, 1)$

κυρτή στο $(1, 2]$

κοίλη στο $[2, 3)$

κοίλη στο $(3, +\infty)$

και παρουσιάζει σημείο καμπής

στο $(2, f(2) = 0)$ δηλαδή στο $(2, 0)$