

26.16 1)

Η f είναι ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0, 2\pi)$ ως πράξεις
 παραγωγίσιμων συναρτήσεων με
 $f'(x) = \sin x - 1$
 $f''(x) = -\cos x$

Η f'' μηδενίζεται στο $x_0 = \pi$

Το πρόσημο της f'' φαίνεται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	0	π	2π	$+\infty$
$f''(x)$			+	0	-
$f(x)$			↗	↘	

Δηλαδή η f είναι

κυρτή στο διάστημα $(0, \pi]$

κοίλη στο διάστημα $[\pi, 2\pi]$

και παρουσιάζει σημείο καμπής

στο $\left(\pi, f(\pi) = \sin \pi - \pi - \frac{1}{2}\right)$ δηλαδή στο $\left(\pi, -\pi - \frac{1}{2}\right)$

26.16 2)

Η f είναι ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ ως πράξεις
 παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f'(x) = \frac{2\eta\mu 2x \cdot \eta\mu 2x - (4 - \sigma\upsilon\nu 2x) \cdot 2\sigma\upsilon\nu 2x}{\eta\mu^2 2x} = \frac{2\eta\mu^2 2x - 8\sigma\upsilon\nu 2x + 2\sigma\upsilon\nu^2 2x}{\eta\mu^2 2x} =$$

$$= \frac{2(\eta\mu^2 2x + \sigma\upsilon\nu^2 2x) - 8\sigma\upsilon\nu 2x}{\eta\mu^2 2x} = \frac{2 - 8\sigma\upsilon\nu 2x}{\eta\mu^2 2x}$$

$$f''(x) = \frac{16\eta\mu 2x \cdot \eta\mu^2 2x - (2 - 8\sigma\upsilon\nu 2x) 2\eta\mu 2x \cdot \sigma\upsilon\nu 2x \cdot 2}{\eta\mu^4 2x} =$$

$$= \frac{16\eta\mu^3 2x - 4\eta\mu 2x \cdot \sigma\upsilon\nu 2x (2 - 8\sigma\upsilon\nu 2x)}{\eta\mu^4 2x} =$$

$$= \frac{4\eta\mu 2x [4\eta\mu^2 2x - 2\sigma\upsilon\nu 2x + 8\sigma\upsilon\nu^2 2x]}{\eta\mu^4 2x} =$$

$$= \frac{4\eta\mu 2x [4\eta\mu^2 2x + 4\sigma\upsilon\nu^2 2x + 4\sigma\upsilon\nu^2 2x - 2\sigma\upsilon\nu 2x]}{\eta\mu^4 2x} =$$

$$= \frac{4\eta\mu 2x [4(\eta\mu^2 2x + \sigma\upsilon\nu^2 2x) + 4\sigma\upsilon\nu^2 2x - 2\sigma\upsilon\nu 2x]}{\eta\mu^4 2x} =$$

$$= \frac{4\eta\mu 2x (4\sigma\upsilon\nu^2 2x - 2\sigma\upsilon\nu 2x + 4)}{\eta\mu^4 2x} = \frac{4y^2 - 2y + 4}{\eta\mu^4 2x}$$

$4y^2 - 2y + 4: \Delta = 4 - 64 = -60 < 0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow 4y^2 - 2y + 4 > 0$
 $\Rightarrow 4\sigma\upsilon\nu^2 2x - 2\sigma\upsilon\nu 2x + 4 > 0$

Είναι $4\sigma\upsilon\nu^2 2x - 2\sigma\upsilon\nu 2x + 4 > 0$ διότι το τριώνυμο $4y^2 - 2y + 4$ έχει $\Delta = 4 - 64 = -60 < 0$ άρα $4y^2 - 2y + 4 > 0$

Το πρόσημο της f'' φαίνεται στον παρακάτω πίνακα (το πρόσημο καθορίζεται μόνο από το $\eta\mu 2x$)

x	$-\infty$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$+\infty$
$f''(x)$			+	-	
f(x)			↗	↘	

Δηλαδή η f είναι

κυρτή στο διάστημα $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

κοίλη στο διάστημα $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$

και δεν παρουσιάζει σημείο καμπής

26.16 3)

Η f είναι ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f'(x) = \frac{\cancel{x}^{-1} - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

$$f''(x) = \frac{-\cancel{x}^{-1} x^{\cancel{2}} - (1 - \ln x) \cdot 2x}{x^4} = \frac{-x - 2x + 2x \ln x}{x^4} = \frac{x(2 \ln x - 3)}{x^4}$$

$$\text{Η } f'' \text{ μηδενίζεται όταν } 2 \ln x - 3 = 0 \Leftrightarrow \ln x = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = e^{\frac{3}{2}} \Rightarrow x = \sqrt{e^3}$$

Το πρόσημο της f'' φαίνεται στον παρακάτω πίνακα (επειδή $x > 0$ το πρόσημο καθορίζεται από το $2 \ln x - 3$)

x	$-\infty$	0	$\sqrt{e^3}$	$+\infty$
$f''(x)$			-	+
f(x)			σημείο καμπής	

Δηλαδή η f είναι

κοίλη στο διάστημα $\left(0, \sqrt{e^3}\right]$

κυρτή στο διάστημα $\left[\sqrt{e^3}, +\infty\right)$

και παρουσιάζει σημείο καμπής

$$\text{στο } \left(\sqrt{e^3}, f(\sqrt{e^3}) = \frac{\ln \sqrt{e^3}}{\sqrt{e^3}} = \frac{\ln e^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{e^3}} = \frac{3}{2\sqrt{e^3}} \right) \text{ δηλαδή στο } \left(\sqrt{e^3}, \frac{3}{2\sqrt{e^3}} \right)$$

26.16 4)

Η f είναι ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0, \pi)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f'(x) = e^x \eta \mu x + e^x \sigma \upsilon \nu x \Rightarrow f'(x) = e^x (\eta \mu x + \sigma \upsilon \nu x)$$

$$f''(x) = e^x (\eta \mu x + \sigma \upsilon \nu x) + e^x (\sigma \upsilon \nu x - \eta \mu x) = e^x (\cancel{\eta \mu x} + \sigma \upsilon \nu x + \sigma \upsilon \nu x - \cancel{\eta \mu x}) = 2e^x \sigma \upsilon \nu x$$

Το πρόσημο της f'' φαίνεται στον παρακάτω πίνακα (επειδή $2e^x > 0$ το πρόσημο καθορίζεται από το $\sigma \upsilon \nu x$)

x	$-\infty$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$+\infty$
$f''(x)$			+	0	-
$f(x)$			σημείο καμπής		

Δηλαδή η f είναι

κυρτή στο διάστημα $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$

κοίλη στο διάστημα $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right)$

και παρουσιάζει σημείο καμπής

στο $\left(\frac{\pi}{2}, f\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{\frac{\pi}{2}} \cdot \eta \mu \frac{\pi}{2}\right)$ δηλαδή στο $\left(\frac{\pi}{2}, \sqrt{e^\pi}\right)$