

26.15 1)

Έστω $\alpha < \beta$. Τότε είναι $\alpha < \frac{\alpha+\beta}{2} < \beta$

(διότι $\alpha < \frac{\alpha+\beta}{2} \Leftrightarrow 2\alpha < \alpha+\beta \Leftrightarrow \alpha < \beta$ που ισχύει

και $\frac{\alpha+\beta}{2} < \beta \Leftrightarrow \alpha+\beta < 2\beta \Leftrightarrow \alpha < \beta$ που ισχύει)

Οπότε η συνάρτηση f

- είναι συνεχής στο διάστημα $\left[\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right]$ και στο $\left[\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right]$
- είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $\left(\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ και στο $\left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right)$

Οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχουν $\xi_1 \in \left(\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ και

$\xi_2 \in \left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right)$, τέτοια ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - f(\alpha)}{\frac{\alpha+\beta}{2} - \alpha} = \frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - f(\alpha)}{\frac{\alpha+\beta-2\alpha}{2}} = \frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - f(\alpha)}{\frac{\beta-\alpha}{2}} \quad (1)$$

$$f'(\xi_2) = \frac{f(\beta) - f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\beta - \frac{\alpha+\beta}{2}} = \frac{f(\beta) - f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\frac{2\beta-\alpha-\beta}{2}} = \frac{f(\beta) - f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\frac{\beta-\alpha}{2}} \quad (2)$$

Ακόμη επειδή η f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω στο Δ , η f' είναι γνησίως αύξουσα στο Δ οπότε

$$\begin{aligned} \xi_1 < \xi_2 &\stackrel{f' \nearrow}{\Rightarrow} f'(\xi_1) < f'(\xi_2) \stackrel{(1),(2)}{\Rightarrow} \frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - f(\alpha)}{\frac{\beta-\alpha}{2}} < \frac{f(\beta) - f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\frac{\beta-\alpha}{2}} \stackrel{\frac{\beta-\alpha}{2} > 0}{\Rightarrow} \\ &\Rightarrow f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - f(\alpha) < f(\beta) - f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \Rightarrow 2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) < f(\beta) + f(\alpha) \end{aligned}$$

26.15 2)

Αν $\alpha = \beta$ η σχέση ισχύει ως ισότητα

Έστω τώρα $\alpha < \beta$

Θεωρούμε την συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \eta \mu x$. Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$ με

$$f'(x) = \sigma \nu x \text{ και } f''(x) = -\eta \mu x$$

Επειδή $\alpha, \beta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ είναι $f''(x) < 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$ άρα η f είναι κοίλη στο $[\alpha, \beta]$

Ακόμη

$$\alpha < \frac{\alpha+\beta}{2} \quad (\text{διότι } \alpha < \frac{\alpha+\beta}{2} \Leftrightarrow 2\alpha < \alpha+\beta \Leftrightarrow \alpha < \beta \text{ που ισχύει})$$

και

$$\frac{\alpha+\beta}{2} < \beta \quad (\text{διότι } \frac{\alpha+\beta}{2} < \beta \Leftrightarrow \alpha+\beta < 2\beta \Leftrightarrow \alpha < \beta \text{ που ισχύει})$$

$$\text{δηλαδή είναι } \alpha < \frac{\alpha+\beta}{2} < \beta$$

Οπότε

Η συνάρτηση f

$$\text{είναι συνεχής στο διάστημα } \left[\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2} \right]$$

$$\text{είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα } \left(\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2} \right)$$

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει $\xi_1 \in \left(\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2} \right)$, τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - f(\alpha)}{\frac{\alpha+\beta}{2} - \alpha} \Rightarrow f'(\xi_1) = \frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - f(\alpha)}{\frac{\alpha+\beta - 2\alpha}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(\xi_1) = \frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - f(\alpha)}{\frac{\beta - \alpha}{2}} \quad (1)$$

Ομοίως η συνάρτηση f

$$\text{είναι συνεχής στο διάστημα } \left[\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta \right]$$

$$\text{είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα } \left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta \right)$$

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει $\xi_2 \in \left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta \right)$, τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_2) = \frac{f(\beta) - f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\beta - \frac{\alpha+\beta}{2}} \Rightarrow f'(\xi_2) = \frac{f(\beta) - f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\frac{2\beta - \alpha - \beta}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(\xi_2) = \frac{f(\beta) - f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\frac{\beta - \alpha}{2}} \quad (2)$$

Ακόμη επειδή η f είναι κοίλη στο $[\alpha, \beta]$, η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $[\alpha, \beta]$ οπότε

$$\xi_1 < \xi_2 \xRightarrow{f' \searrow} f'(\xi_1) > f'(\xi_2) \xRightarrow{(1),(2)} \frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - f(\alpha)}{\frac{\beta - \alpha}{2}} > \frac{f(\beta) - f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\frac{\beta - \alpha}{2}} \xRightarrow{\frac{\beta - \alpha}{2} > 0}$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - f(\alpha) > f(\beta) - f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \Rightarrow 2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) > f(\beta) + f(\alpha) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) > \frac{f(\beta) + f(\alpha)}{2} \Rightarrow \boxed{\eta\mu\frac{\alpha+\beta}{2} > \frac{\eta\mu\alpha + \eta\mu\beta}{2}}$$

Οπότε σε κάθε περίπτωση ισχύει $\frac{\eta\mu\alpha + \eta\mu\beta}{2} \leq \eta\mu\frac{\alpha+\beta}{2}$, για κάθε $\alpha, \beta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

26.15 3)

Αν $\alpha = \beta$ η σχέση ισχύει ως ισότητα

Έστω τώρα $\alpha < \beta$

Θεωρούμε την συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = e^x$. Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$ με $f'(x) = e^x$ και $f''(x) = e^x$

Προφανώς είναι $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$ άρα η f είναι κυρτή στο $[\alpha, \beta]$

Ακόμη

$$\alpha < \frac{\alpha+\beta}{2} \quad (\text{διότι } \alpha < \frac{\alpha+\beta}{2} \Leftrightarrow 2\alpha < \alpha+\beta \Leftrightarrow \alpha < \beta \text{ που ισχύει})$$

και

$$\frac{\alpha+\beta}{2} < \beta \quad (\text{διότι } \frac{\alpha+\beta}{2} < \beta \Leftrightarrow \alpha+\beta < 2\beta \Leftrightarrow \alpha < \beta \text{ που ισχύει})$$

$$\text{δηλαδή είναι } \alpha < \frac{\alpha+\beta}{2} < \beta$$

Οπότε

Η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $\left[\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right]$

είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $\left(\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right)$

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει $\xi_1 \in \left(\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right)$, τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - f(\alpha)}{\frac{\alpha+\beta}{2} - \alpha} \Rightarrow f'(\xi_1) = \frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - f(\alpha)}{\frac{\alpha+\beta - 2\alpha}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(\xi_1) = \frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - f(\alpha)}{\frac{\beta - \alpha}{2}} \quad (1)$$

Ομοίως η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $\left[\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right]$

είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $\left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right)$

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει $\xi_2 \in \left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right)$, τέτοιο ώστε

$$\begin{aligned} f'(\xi_2) &= \frac{f(\beta) - f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\beta - \frac{\alpha+\beta}{2}} \Rightarrow f'(\xi_2) = \frac{f(\beta) - f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\frac{2\beta - \alpha - \beta}{2}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow f'(\xi_2) = \frac{f(\beta) - f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\frac{\beta - \alpha}{2}} \quad (2) \end{aligned}$$

Ακόμη επειδή η f είναι κυρτή στο $[\alpha, \beta]$, η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $[\alpha, \beta]$ οπότε

$$\xi_1 < \xi_2 \xRightarrow{f' \nearrow} f'(\xi_1) < f'(\xi_2) \xRightarrow{(1),(2)} \frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - f(\alpha)}{\frac{\beta - \alpha}{2}} < \frac{f(\beta) - f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\frac{\beta - \alpha}{2}} \xRightarrow{\frac{\beta - \alpha}{2} > 0}$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - f(\alpha) < f(\beta) - f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \Rightarrow 2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) < f(\beta) + f(\alpha) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) < \frac{f(\beta) + f(\alpha)}{2} \Rightarrow \boxed{e^{\frac{\alpha+\beta}{2}} < \frac{e^\alpha + e^\beta}{2}}$$

Οπότε σε κάθε περίπτωση ισχύει $\frac{e^\alpha + e^\beta}{2} \geq e^{\frac{\alpha+\beta}{2}}$, για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

26.15 4)

Έχουμε ισοδύναμα

$$\alpha^a \beta^b > \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^{a+b} \Leftrightarrow \ln(\alpha^a \beta^b) > \ln\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^{a+b} \Leftrightarrow a \ln \alpha + b \ln \beta > (a+b) \ln\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a \ln \alpha + b \ln \beta > (a+b) \ln\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \Leftrightarrow a \ln \alpha + b \ln \beta > 2 \frac{a+b}{2} \ln\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

$$\boxed{\text{Αρκεί λοιπόν να αποδειχτεί ότι } a \ln \alpha + b \ln \beta > 2 \frac{a+b}{2} \ln\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}$$

Θεωρούμε την συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x \ln x$. Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$ με

$$f'(x) = \ln x + \cancel{x} \frac{1}{\cancel{x}} = \ln x + 1 \quad \text{και} \quad f''(x) = \frac{1}{x}$$

Επειδή $\alpha, \beta > 0$ είναι $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$ άρα η f είναι κυρτή στο $[\alpha, \beta]$

Ακόμη

$$\alpha < \frac{\alpha + \beta}{2} \quad (\text{διότι } \alpha < \frac{\alpha + \beta}{2} \Leftrightarrow 2\alpha < \alpha + \beta \Leftrightarrow \alpha < \beta \text{ που ισχύει})$$

και

$$\frac{\alpha + \beta}{2} < \beta \quad (\text{διότι } \frac{\alpha + \beta}{2} < \beta \Leftrightarrow \alpha + \beta < 2\beta \Leftrightarrow \alpha < \beta \text{ που ισχύει})$$

$$\text{δηλαδή είναι } \alpha < \frac{\alpha + \beta}{2} < \beta$$

Οπότε

Η συνάρτηση f

$$\text{είναι συνεχής στο διάστημα } \left[\alpha, \frac{\alpha + \beta}{2} \right]$$

$$\text{είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα } \left(\alpha, \frac{\alpha + \beta}{2} \right)$$

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει $\xi_1 \in \left(\alpha, \frac{\alpha + \beta}{2} \right)$, τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) - f(\alpha)}{\frac{\alpha + \beta}{2} - \alpha} \Rightarrow f'(\xi_1) = \frac{f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) - f(\alpha)}{\frac{\alpha + \beta - 2\alpha}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(\xi_1) = \frac{f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) - f(\alpha)}{\frac{\beta - \alpha}{2}} \quad (1)$$

Ομοίως η συνάρτηση f

$$\text{είναι συνεχής στο διάστημα } \left[\frac{\alpha + \beta}{2}, \beta \right]$$

$$\text{είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα } \left(\frac{\alpha + \beta}{2}, \beta \right)$$

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει $\xi_2 \in \left(\frac{\alpha + \beta}{2}, \beta \right)$, τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_2) = \frac{f(\beta) - f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)}{\beta - \frac{\alpha + \beta}{2}} \Rightarrow f'(\xi_2) = \frac{f(\beta) - f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)}{\frac{2\beta - \alpha - \beta}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(\xi_2) = \frac{f(\beta) - f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)}{\frac{\beta - \alpha}{2}} \quad (2)$$

Ακόμη επειδή η f είναι κυρτή στο $[\alpha, \beta]$, η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $[\alpha, \beta]$ οπότε

$$\xi_1 < \xi_2 \Rightarrow f'(\xi_1) < f'(\xi_2) \stackrel{(1),(2)}{\Rightarrow} \frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - f(\alpha)}{\frac{\beta-\alpha}{2}} < \frac{f(\beta) - f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\frac{\beta-\alpha}{2}} \stackrel{\frac{\beta-\alpha}{2} > 0}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - f(\alpha) < f(\beta) - f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \Rightarrow 2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) < f(\beta) + f(\alpha) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha \ln \alpha + \beta \ln \beta > 2 \frac{\alpha+\beta}{2} \ln\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

$$\text{Οπότε ισοδύναμα ισχύει } \alpha^\alpha \beta^\beta > \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^{\alpha+\beta}, \text{ για κάθε } \alpha, \beta > 0$$