

Γ ΛΥΚΕΙΟΥ ΜΕΡΟΣ Β

26.14 1)

Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f'(x) = 2\lambda e^x - 2x \text{ και } f''(x) = 2\lambda e^x - 2$$

$$\text{Οπότε } f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2\lambda e^x - 2 = 0 \Leftrightarrow 2\lambda e^x = 2 \Leftrightarrow e^x = \frac{2}{2\lambda} \stackrel{\lambda > 0}{\Leftrightarrow} x = \ln \frac{1}{\lambda} \Leftrightarrow x = -\ln \lambda$$

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow 2\lambda e^x - 2 > 0 \Leftrightarrow 2\lambda e^x > 2 \stackrel{\lambda > 0}{\Leftrightarrow} e^x > \frac{1}{\lambda} \Leftrightarrow x > \ln \frac{1}{\lambda} \Leftrightarrow x > -\ln \lambda$$

$$f''(x) < 0 \Leftrightarrow 2\lambda e^x - 2 < 0 \Leftrightarrow 2\lambda e^x < 2 \stackrel{\lambda > 0}{\Leftrightarrow} e^x < \frac{1}{\lambda} \Leftrightarrow x < \ln \frac{1}{\lambda} \Leftrightarrow x < -\ln \lambda$$

Τα πρόσημα της f'' , η κυρτότητα και τα σημεία καμπής της f φαίνονται στον διπλανό πίνακα

x	$-\infty$	$-\ln \lambda$	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+
f(x)			

Από τον πίνακα αυτό προκύπτει ότι η f έχει ακριβώς ένα σημείο καμπής το $(-\ln \lambda, f(-\ln \lambda))$

$$\text{Όμως } f(-\ln \lambda) = 2\lambda e^{-\ln \lambda} - (-\ln \lambda)^2 = 2\lambda e^{\ln \lambda^{-1}} - \ln^2 \lambda = 2\lambda \frac{1}{\lambda} - \ln^2 \lambda = 2 - \ln^2 \lambda$$

Επομένως το σημείο καμπής της f είναι το $(-\ln \lambda, 2 - \ln^2 \lambda)$

το οποίο ικανοποιεί την εξίσωση $y = -x^2 + 2$ (διότι $2 - \ln^2 \lambda = -(-\ln \lambda)^2 + 2$) άρα ανήκει στην παραβολή με εξίσωση $y = -x^2 + 2$

26.14 2)

Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f'(x) = \frac{3x^2}{\lambda} + 4x + \lambda \text{ και } f''(x) = \frac{6x}{\lambda} + 4$$

$$\text{Οπότε } f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{6x}{\lambda} + 4 = 0 \Leftrightarrow \frac{6x}{\lambda} = -4 \Leftrightarrow 6x = -4\lambda \Leftrightarrow x = \frac{-4\lambda}{6} \Leftrightarrow x = -\frac{2\lambda}{3}$$

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{6x}{\lambda} + 4 > 0 \Leftrightarrow \frac{6x}{\lambda} > -4 \Leftrightarrow 6x > -4\lambda \Leftrightarrow x > \frac{-4\lambda}{6} \Rightarrow x > -\frac{2\lambda}{3}$$

$$f''(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{6x}{\lambda} + 4 < 0 \Leftrightarrow \frac{6x}{\lambda} < -4 \Leftrightarrow 6x < -4\lambda \Leftrightarrow x < \frac{-4\lambda}{6} \Rightarrow x < -\frac{2\lambda}{3}$$

Το πρόσημο της f'' φαίνεται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	$-\frac{2\lambda}{3}$	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+
f(x)			

$$\text{Ακόμη } f\left(-\frac{2\lambda}{3}\right) = \frac{1}{\lambda} \left(-\frac{2\lambda}{3}\right)^3 + 2 \left(-\frac{2\lambda}{3}\right)^2 + \lambda \left(-\frac{2\lambda}{3}\right) = -\frac{8\lambda^3}{27\lambda} + \frac{8\lambda^2}{9} - \frac{2\lambda^2}{3} =$$

$$= -\frac{8\lambda^2}{27} + \frac{24\lambda^2}{27} - \frac{18\lambda^2}{27} = -\frac{2\lambda^2}{27}$$

Άρα η f έχει σημείο καμπής στο $\left(-\frac{2\lambda}{3}, f\left(-\frac{2\lambda}{3}\right)\right) = \left(-\frac{2\lambda}{3}, -\frac{2\lambda^2}{27}\right)$ το οποίο

ικανοποιεί την εξίσωση $y = -\frac{1}{6}x^2$ (διότι $-\frac{2\lambda^2}{27} = -\frac{1}{6}\left(-\frac{2\lambda}{3}\right)^2$) άρα ανήκει στην

παραβολή με εξίσωση $y = -\frac{1}{6}x^2$

26.14 3)

Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f'(x) = e^x - 2\lambda x \text{ και } f''(x) = e^x - 2\lambda$$

$$\text{Οπότε } f''(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - 2\lambda = 0 \Rightarrow e^x = 2\lambda \stackrel{\lambda > 0}{\Rightarrow} x = \ln 2\lambda$$

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow e^x - 2\lambda > 0 \Rightarrow e^x > 2\lambda \stackrel{\lambda > 0}{\Rightarrow} x > \ln 2\lambda$$

$$f''(x) < 0 \Leftrightarrow e^x - 2\lambda < 0 \Rightarrow e^x < 2\lambda \stackrel{\lambda > 0}{\Rightarrow} x < \ln 2\lambda$$

Το πρόσημο της f'' φαίνεται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	$\ln 2\lambda$	$+\infty$
$f''(x)$		$\emptyset$	
	-		+
$f(x)$		σημείο καμπής	

$$\text{Ακόμη } f(\ln 2\lambda) = e^{\ln 2\lambda} - \lambda(\ln 2\lambda)^2 = 2\lambda - \lambda \ln^2 2\lambda$$

$$\text{Άρα η } f \text{ έχει σημείο καμπής στο } A(\ln 2\lambda, f(\ln 2\lambda)) = A(\ln 2\lambda, 2\lambda - \lambda \ln^2 2\lambda)$$

Όμως

$$g(\ln 2\lambda) = e^{\ln 2\lambda} \left(1 - \frac{\ln^2 2\lambda}{2}\right) = 2\lambda \left(1 - \frac{\ln^2 2\lambda}{2}\right) = 2\lambda - \cancel{2}\lambda \frac{\ln^2 2\lambda}{\cancel{2}} = 2\lambda - 2\ln^2 2\lambda$$

$$\text{άρα το } A \text{ ανήκει στην γραφική παράσταση της συνάρτησης } g(x) = e^x \left(1 - \frac{x^2}{2}\right)$$