

Γ ΛΥΚΕΙΟΥ ΜΕΡΟΣ Β

26.13 1)

Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική και είναι

$$f'(x) = 15x^4 - 30x^2 + 3, \quad f''(x) = 60x^3 - 60x = 60x(x^2 - 1) = 60x(x-1)(x+1)$$

Τα πρόσημα της f'' , η κυρτότητα και τα σημεία καμπής της f φαίνονται στον διπλανό πίνακα

x	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$							
	$\sigma. \kappa.$		$\sigma. \kappa.$		$\sigma. \kappa.$		

Από το παραπάνω πίνακα φαίνεται ότι η f παρουσιάζει καμπή στα σημεία

$A(-1, f(-1))$, $B(0, f(0))$ και $\Gamma(1, f(1))$ δηλαδή στα $A(-1, -6)$, $B(0, -10)$ και

$\Gamma(1, -14)$

Αρκεί τώρα να δείξουμε ότι τα σημεία A , B και Γ είναι συνευθειακά. Πράγματι

$$\lambda_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-10 + 6}{0 + 1} = -4$$

$$\lambda_{B\Gamma} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-14 + 10}{1 - 0} = -4$$

οπότε αφού $\lambda_{AB} = \lambda_{B\Gamma}$ συμπεραίνουμε ότι τα σημεία A , B και Γ είναι συνευθειακά

26.13 2)

Είναι $f(x) = 3x^5 - 10x^3 + 15x$. Οπότε η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική με

$$f'(x) = 15x^4 - 30x^2 + 15$$

$$f''(x) = 60x^3 - 60x = 60x(x^2 - 1) = 60x(x-1)(x+1)$$

Το πρόσημο της f'' φαίνεται στον παρακάτω πίνακα (το πρόσημο καθορίζεται από το $x(x-1)(x+1)$)

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$			
$f''(x)$	-	0	+	0	-	+		
f(x)	 σημείο καμπής		 σημείο καμπής		 σημείο καμπής			

Από το παραπάνω πίνακα φαίνεται ότι η f παρουσιάζει καμπή στα σημεία

$A(-1, f(-1))$, $B(0, f(0))$ και $\Gamma(1, f(1))$ δηλαδή στα $A(-1, -8)$, $B(0, 0)$ και

$\Gamma(1, 8)$

Αρκεί τώρα να δείξουμε ότι τα σημεία A , B και Γ είναι συνευθειακά. Πράγματι

$$\lambda_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0 + 8}{0 + 1} = 8$$

$$\lambda_{B\Gamma} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{8 - 0}{1 - 0} = 8$$

οπότε αφού $\lambda_{AB} = \lambda_{B\Gamma}$ συμπεραίνουμε ότι τα σημεία A , B και Γ είναι συνευθειακά

26.13 3)

Είναι $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$. Οπότε η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική με

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$$

$$f''(x) = 6x - 6 = 6(x-1)$$

Είναι

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ή } x = 2$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow x = 1$$

Τα πρόσημα της f' η μονοτονία και τα ακρότατα της φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$		$\nearrow$	4	$\nearrow$	0	$\searrow$	

Τα πρόσημα της f'' η κυρτότητα και τα σημεία καμπής της φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f''(x)$		-	0	+	
$f(x)$		$\curvearrowright$	σημείο καμπής	$\curvearrowleft$	

Από τους παραπάνω πίνακες φαίνεται ότι η f παρουσιάζει ακρότατα στα σημεία $A(0, 4)$ και $B(2, 0)$ καμπή στο σημείο $\Gamma(1, f(1) = 2)$ δηλαδή στο $\Gamma(1, 2)$

Αρκεί τώρα να δείξουμε ότι τα σημεία A , B και Γ είναι συνευθειακά. Πράγματι

$$\lambda_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0 - 4}{2 - 0} = -2$$

$$\lambda_{B\Gamma} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2 - 0}{1 - 2} = -2$$

οπότε αφού $\lambda_{AB} = \lambda_{B\Gamma}$ συμπεραίνουμε ότι τα σημεία A , B και Γ είναι συνευθειακά

26.13 4)

Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική με

$$f'(x) = 3\alpha x^2 - 2\beta x = x(3\alpha x - 2\beta)$$

Είναι

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ή } x = \frac{2\beta}{3\alpha}$$

και επειδή η f' είναι τριώνυμο θα αλλάξει πρόσημα εκατέρωθεν των ριζών άρα στα σημεία μηδενισμού της παραγώγου η f θα έχει ακρότατο

Άρα η f παρουσιάζει ακρότατα στα σημεία

$$A(0, f(0)) = A(0, 0)$$

$$\text{και } B\left(\frac{2\beta}{3\alpha}, f\left(\frac{2\beta}{3\alpha}\right)\right) \stackrel{f\left(\frac{2\beta}{3\alpha}\right)=\alpha\left(\frac{2\beta}{3\alpha}\right)^3-\beta\left(\frac{2\beta}{3\alpha}\right)^2=\cancel{\alpha}\frac{8\beta^3}{27\alpha^3}-\beta\frac{4\beta^2}{9\alpha^2}=\frac{8\beta^3}{27\alpha^2}-\frac{4\beta^3}{9\alpha^2}=\frac{-4\beta^3}{27\alpha^2}}{=} B\left(\frac{2\beta}{3\alpha}, \frac{-4\beta^3}{27\alpha^2}\right)$$

Ακόμη

$$f''(x) = 6\alpha x - 2\beta$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{2\beta}{6\alpha} \Rightarrow x = \frac{\beta}{3\alpha}$$

και προφανώς η f'' θα αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν της ρίζας άρα στα σημεία μηδενισμού της δεύτερης παραγώγου η f θα έχει σημείο καμπής

Άρα η f παρουσιάζει καμπή στο σημείο

$$\Gamma\left(\frac{\beta}{3\alpha}, f\left(\frac{\beta}{3\alpha}\right)\right) \stackrel{f\left(\frac{\beta}{3\alpha}\right)=\alpha\left(\frac{\beta}{3\alpha}\right)^3-\beta\left(\frac{\beta}{3\alpha}\right)^2=\cancel{\alpha}\frac{\beta^3}{27\alpha^3}-\beta\frac{\beta^2}{9\alpha^2}=\frac{\beta^3}{27\alpha^2}-\frac{\beta^3}{9\alpha^2}=\frac{-2\beta^3}{27\alpha^2}}{=} \Gamma\left(\frac{\beta}{3\alpha}, \frac{-2\beta^3}{27\alpha^2}\right)$$

Αρκεί τώρα να δείξουμε ότι τα σημεία $A(0,0)$, $B\left(\frac{2\beta}{3\alpha}, \frac{-4\beta^3}{27\alpha^2}\right)$ και

$\Gamma\left(\frac{\beta}{3\alpha}, \frac{-2\beta^3}{27\alpha^2}\right)$ είναι συνευθειακά. Πράγματι

$$\lambda_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\frac{-4\beta^3}{27\alpha^2} - 0}{\frac{2\beta}{3\alpha} - 0} = \frac{\cancel{\frac{2}{9}}\frac{\beta^3}{\alpha^2}}{\cancel{\frac{2}{3}}\frac{\beta}{\alpha}} = \frac{-2\beta^2}{9\alpha}$$

$$\lambda_{AG} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\frac{-2\beta^3}{27\alpha^2} - 0}{\frac{\beta}{3\alpha} - 0} = \frac{\cancel{\frac{2}{9}}\frac{\beta^3}{\alpha^2}}{\cancel{\frac{1}{3}}\frac{\beta}{\alpha}} = \frac{-2\beta^2}{9\alpha}$$

οπότε αφού $\lambda_{AB} = \lambda_{AG}$ συμπεραίνουμε ότι τα σημεία A , B και Γ είναι συνευθειακά

26.13 5)

α) Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως ρητή με

$$f'(x) = \frac{x^2 + \alpha^2 - 2x^2}{(x^2 + \alpha^2)^2} = \frac{\alpha^2 - x^2}{(x^2 + \alpha^2)^2}$$

$$f''(x) = \frac{-2x(x^2 + \alpha^2)^2 - (\alpha^2 - x^2)2(x^2 + \alpha^2)2x}{(x^2 + \alpha^2)^4}$$

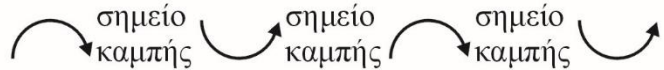
$$= \frac{-2x(x^2 + \alpha^2)^2 - 4x(\alpha^2 - x^2)(x^2 + \alpha^2)}{(x^2 + \alpha^2)^4} =$$

$$= \frac{-2x(x^2 + \alpha^2)(x^2 + \alpha^2 + 2\alpha^2 - 2x^2)}{(x^2 + \alpha^2)^4} = \frac{-2x(x^2 + \alpha^2)(3\alpha^2 - x^2)}{(x^2 + \alpha^2)^4} =$$

$$= \frac{2x(x^2 + \alpha^2)(x^2 - 3\alpha^2)}{(x^2 + \alpha^2)^4} = \frac{2x(x^2 + \alpha^2)(x - \alpha\sqrt{3})(x + \alpha\sqrt{3})}{(x^2 + \alpha^2)^4}$$

Το πρόσημο της f'' φαίνεται στον παρακάτω πίνακα (το πρόσημο καθορίζεται από το $x(x - \alpha\sqrt{3})(x + \alpha\sqrt{3})$)

Τα πρόσημο της f'' φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	$-\alpha\sqrt{3}$		0		$\alpha\sqrt{3}$	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	$\emptyset$	$+$	$\emptyset$	$-$	$\emptyset$	$+$
$f(x)$							

Από το παραπάνω πίνακα φαίνεται ότι η f παρουσιάζει καμπή στα σημεία $A(-\alpha\sqrt{3}, f(\alpha\sqrt{3}))$, $B(\alpha\sqrt{3}, f(\alpha\sqrt{3}))$ και $\Gamma(0, f(0))$

και επειδή

$$f(-\alpha\sqrt{3}) = \frac{-\alpha\sqrt{3}}{(-\alpha\sqrt{3})^2 + \alpha^2} = \frac{-\cancel{\alpha}\sqrt{3}}{4\alpha^{\cancel{2}}} = \frac{-\sqrt{3}}{4\alpha} \quad \text{και}$$

$$f(\alpha\sqrt{3}) = \frac{\alpha\sqrt{3}}{(\alpha\sqrt{3})^2 + \alpha^2} = \frac{\cancel{\alpha}\sqrt{3}}{4\alpha^{\cancel{2}}} = \frac{\sqrt{3}}{4\alpha}$$

τα σημεία καμπής είναι τα

$$A\left(-\alpha\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{4\alpha}\right), B\left(\alpha\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{4\alpha}\right) \text{ και } \Gamma(0, 0)$$

Αρκεί τώρα να δείξουμε ότι τα σημεία A , B και Γ είναι συνευθειακά.
Πράγματι

$$\lambda_{\Gamma A} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{4\alpha} - 0}{-\alpha\sqrt{3} - 0} = \frac{-\cancel{\sqrt{3}}}{-\alpha\cancel{\sqrt{3}}} = \frac{1}{4\alpha^2}$$

$$\lambda_{\Gamma B} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4\alpha} - 0}{\alpha\sqrt{3} - 0} = \frac{\cancel{\sqrt{3}}}{\alpha\cancel{\sqrt{3}}} = \frac{1}{4\alpha^2}$$

οπότε αφού $\lambda_{\Gamma A} = \lambda_{\Gamma B}$ συμπεραίνουμε ότι τα σημεία A , B και Γ είναι συνευθειακά

β) Είναι $f'(x) = \frac{\alpha^2 - x^2}{(x^2 + \alpha^2)^2}$, $x \in \mathbb{R}$

Είναι $f'(x) = 0 \Rightarrow x = -\alpha$ ή $x = \alpha$

με

$$f(-\alpha) = \frac{-\alpha}{(-\alpha)^2 + \alpha^2} = \frac{-\cancel{\alpha}}{2\alpha^{\cancel{2}}} = -\frac{1}{2\alpha} \quad \text{και} \quad f(\alpha) = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \alpha^2} = \frac{\cancel{\alpha}}{2\alpha^{\cancel{2}}} = \frac{1}{2\alpha}$$

Τα πρόσημα της f' η μονοτονία και τα ακρότατα της φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	$-\alpha$		α	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	0	-
f(x)					
		$-\frac{1}{2\alpha}$		$\frac{1}{2\alpha}$	
		τοπικό ελάχιστο		τοπικό μέγιστο	

Άρα τα σημεία του διαγράμματος της f που αντιστοιχούν στα τοπικά της ακρότατα είναι τα $\Gamma\left(-\alpha, -\frac{1}{2\alpha}\right)$ και $\Delta\left(\alpha, \frac{1}{2\alpha}\right)$

Μένει λοιπόν να δείξουμε ότι τα σημεία $A\left(-\alpha\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{4\alpha}\right)$, $B\left(\alpha\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{4\alpha}\right)$

$\Gamma\left(-\alpha, -\frac{1}{2\alpha}\right)$ και $\Delta\left(\alpha, \frac{1}{2\alpha}\right)$ είναι κορυφές παραλληλογράμμου

Πράγματι

$$\overrightarrow{A\Gamma} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1) = \left(-\alpha + \alpha\sqrt{3}, -\frac{1}{2\alpha} + \frac{\sqrt{3}}{4\alpha}\right) = \left(-\alpha + \alpha\sqrt{3}, \frac{-2 + \sqrt{3}}{4\alpha}\right)$$

$$\overrightarrow{B\Delta} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1) = \left(\alpha - \alpha\sqrt{3}, \frac{1}{2\alpha} - \frac{\sqrt{3}}{4\alpha}\right) = \left(\alpha - \alpha\sqrt{3}, \frac{2 - \sqrt{3}}{4\alpha}\right)$$

$$\text{Οπότε } \overrightarrow{A\Gamma} = -\overrightarrow{B\Delta} \Rightarrow \begin{cases} A\Gamma = B\Delta \\ A\Gamma \parallel B\Delta \end{cases}$$

που σημαίνει ότι τα σημεία A , B , Γ , Δ είναι κορυφές παραλληλογράμμου