

Γ ΛΥΚΕΙΟΥ ΜΕΡΟΣ Β

26.11 1)

Έστω ότι η f έχει σημείο καμπής στο $A(x_0, f(x_0))$. Τότε επειδή η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη, σύμφωνα με γνωστό θεώρημα θα πρέπει $f''(x_0) = 0$

Όμως

$$\begin{aligned} f^2(x) = x^2 - 6x &\xRightarrow{\text{παραγωγίζουμε}} 2f(x) \cdot f'(x) = 2x - 6 \xRightarrow{\text{παραγωγίζουμε}} \\ \Rightarrow 2f'(x) \cdot f'(x) + 2f(x)f''(x) &= 2 \xRightarrow{\text{θέτουμε } x=x_0} 2[f'(x_0)]^2 + 2f(x_0)f''(x_0) = 2 \xRightarrow{f''(x_0)=0} \\ 2[f'(x_0)]^2 &= 2 \Rightarrow [f'(x_0)]^2 = 1 \Rightarrow f'(x_0) = \pm 1 \text{ άτοπο} \end{aligned}$$

Άρα η C_f δεν έχει κανένα σημείο καμπής

26.11 2)

Έστω ότι η f έχει σημείο καμπής στο $A(x_0, f(x_0))$. Τότε επειδή η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη, σύμφωνα με γνωστό θεώρημα θα πρέπει $f''(x_0) = 0$

Όμως

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^4}{3} + \frac{2\alpha x^3}{3} + \left(\alpha^2 - 2\alpha + \frac{5}{2}\right)x^2 + (\alpha^3 + 7)x - 5\alpha^2 \xRightarrow{\text{παραγωγίζουμε}} \\ \Rightarrow f'(x) &= \frac{4x^3}{3} + 2\alpha x^2 + (2\alpha^2 - 4\alpha + 5)x + (\alpha^3 + 7) \xRightarrow{\text{παραγωγίζουμε}} \\ \Rightarrow f''(x) &= 4x^2 + 4\alpha x + 2\alpha^2 - 4\alpha + 5 \xRightarrow{\text{θέτουμε } x=x_0} \\ \Rightarrow f''(x_0) &= 4x_0^2 + 4\alpha x_0 + 2\alpha^2 - 4\alpha + 5 \xRightarrow{f''(x_0)=0} 4x_0^2 + 4\alpha x_0 + 2\alpha^2 - 4\alpha + 5 = 0 \\ &\text{άτοπο} \end{aligned}$$

διότι το τριώνυμο $4x_0^2 + 4\alpha x_0 + 2\alpha^2 - 4\alpha + 5$ έχει διακρίνουσα

$$\begin{aligned} \Delta &= 16\alpha^2 - 16(2\alpha^2 - 4\alpha + 5) = 16(\alpha^2 - 2\alpha^2 + 4\alpha - 5) = 16(-\alpha^2 + 4\alpha - 5) = \\ &= -16(\alpha^2 - 4\alpha + 5) \end{aligned}$$

$\alpha^2 - 4\alpha + 5: \Delta = 16 - 20 = -4 < 0$
 $\text{Άρα } \alpha^2 - 4\alpha + 5 > 0$

Άρα η C_f δεν έχει κανένα σημείο καμπής

26.11 3)

Έστω ότι η f έχει σημείο καμπής στο $A(x_0, f(x_0))$. Τότε επειδή η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη, σύμφωνα με γνωστό θεώρημα θα πρέπει $f''(x_0) = 0$

Όμως

$$\begin{aligned} f(x) &= x^4 - 2\lambda x^3 + 6(\lambda^2 - 2\lambda + 3)x^2 + x + 1994 \xRightarrow{\text{παραγωγίζουμε}} \\ \Rightarrow f'(x) &= 4x^3 - 6\lambda x^2 + 12(\lambda^2 - 2\lambda + 3)x + 1 \xRightarrow{\text{παραγωγίζουμε}} \\ \Rightarrow f''(x) &= 12x^2 - 12\lambda x + 12(\lambda^2 - 2\lambda + 3) \xRightarrow{\text{θέτουμε } x=x_0} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f''(x_0) = 12x_0^2 - 12\lambda x_0 + 12(\lambda^2 - 2\lambda + 3) \stackrel{f''(x_0)=0}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow 12x_0^2 - 12\lambda x_0 + 12(\lambda^2 - 2\lambda + 3) = 0 \Rightarrow x_0^2 - \lambda x_0 + \lambda^2 - 2\lambda + 3 = 0$$

άτοπο

διότι το τριώνυμο $x_0^2 - \lambda x_0 + \lambda^2 - 2\lambda + 3 = 0$ έχει διακρίνουσα

$$\Delta = \lambda^2 - 4(\lambda^2 - 2\lambda + 3) = \lambda^2 - 4\lambda^2 + 8\lambda - 12 = -3\lambda^2 + 8\lambda - 12 \stackrel{\Delta=8^2-144=-80<0}{<} 0$$

Άρα η C_f δεν έχει κανένα σημείο καμπής

26.11 4)

Έστω ότι η f έχει σημείο καμπής στο σημείο $(x_0, f(x_0))$. Τότε επειδή η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, σύμφωνα με γνωστό θεώρημα θα ισχύει $f''(x_0) = 0$.

Όμως

$$3f^2(x) + xf(x) + 3x^2 = x \stackrel{\text{παραγωγίζουμε}}{\Rightarrow} 6f(x)f'(x) + f(x) + xf'(x) + 6x = 1 \stackrel{\text{παραγωγίζουμε}}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow 6f'(x)f'(x) + 6f(x)f''(x) + f'(x) + f'(x) + xf''(x) + 6 = 0 \stackrel{\text{θέτουμε } x=x_0}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow 6[f'(x_0)]^2 + 6f(x_0)f''(x_0) + 2f'(x_0) + x_0f''(x_0) + 6 = 0 \stackrel{f''(x_0)=0}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow 6[f'(x_0)]^2 + 2f'(x_0) + 6 = 0 \quad \text{άτοπο} \quad (\text{διότι το προηγούμενο τριώνυμο έχει διακρίνουσα } \Delta = 4 - 144 < 0)$$

Άρα η f δεν έχει σημεία καμπής

26.11 5)

Έστω ότι η f έχει σημείο καμπής στο σημείο $(x_0, f(x_0))$. Τότε επειδή η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, σύμφωνα με γνωστό θεώρημα θα ισχύει $f''(x_0) = 0$.

Όμως

$$f^2(x) + xf(x) = -x^2 + 1 \stackrel{\text{παραγωγίζουμε}}{\Rightarrow} 2f(x)f'(x) + f(x) + xf'(x) = -2x \stackrel{\text{παραγωγίζουμε}}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow 2f'(x)f'(x) + 2f(x)f''(x) + f'(x) + f'(x) + xf''(x) = -2 \stackrel{\text{θέτουμε } x=x_0}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow 2f'(x_0)f'(x_0) + 2f(x_0)f''(x_0) + 2f'(x_0) + x_0f''(x_0) = -2 \stackrel{f''(x_0)=0}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow 2[f'(x_0)]^2 + 2f'(x_0) + 2 = 0 \quad \text{άτοπο} \quad (\text{διότι το προηγούμενο τριώνυμο έχει διακρίνουσα } \Delta = 4 - 16 < 0)$$

Άρα η f δεν έχει σημεία καμπής