

25.9 1)

Η f , έχει πεδίο ορισμού το $A = (0, +\infty)$ και είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό ως

διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$

Η f' μηδενίζεται στο $x_0 = 1$ και είναι $f(1) = 1 - \ln 1 = 1$

Ακόμη $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 - (-\infty) = +\infty$ και

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{\ln x}{x} \right) \stackrel{\substack{0 \\ x \rightarrow +\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} \stackrel{\substack{0 \\ \text{DLH } x \rightarrow +\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad (+\infty)(1-0) = +\infty$$

Τα πρόσημα της f' , η μονοτονία, τα ακρότατα και τα όρια της f στα άκρα του πεδίου ορισμού της φαίνονται στον διπλανό πίνακα

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$			- 0 +	
$f(x)$		$+\infty$	1	$+\infty$

Οπότε

στο διάστημα $A_1 = (0, 1]$ είναι $f \searrow \Rightarrow f(A_1) = [f(1), \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)] = [1, +\infty)$

στο διάστημα $A_2 = [1, +\infty)$ είναι $f \nearrow \Rightarrow f(A_2) = [f(1), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)] = [1, +\infty)$

Επομένως το σύνολο τιμών της f είναι το $f(A) = f(A_1) \cup f(A_2) = [1, +\infty)$

25.9 2)

Η f ως πολωνυμική, έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό με $f'(x) = 2x + 4 = 2(x + 2)$

Η f' μηδενίζεται στο $x_0 = -2$ και $f(-2) = (-2)^2 + 4(-2) - 1 = -5$

Ακόμη

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2) = +\infty$$

Τα πρόσημα της f' , η μονοτονία, τα ακρότατα και τα όρια της f στα άκρα του πεδίου ορισμού της φαίνονται στον διπλανό πίνακα

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 +	
$f(x)$	$+\infty$	-5 τε	$+\infty$

Οπότε

στο διάστημα $A_1 = (-\infty, -2]$ η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα άρα

$$f(A_1) = [f(-2), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)] = [-5, +\infty)$$

στο διάστημα $A_2 = [-2, +\infty)$ η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα άρα

$$f(A_2) = [f(-2), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)] = [-5, +\infty)$$

Επομένως το σύνολο τιμών της f είναι το

$$f(A) = f(A_1) \cup f(A_2) = [-5, +\infty)$$

25.9 3)

Η f ως πολυωνυμική, έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό με $f'(x) = -4x + 4 = -4(x-1)$

Η f' μηδενίζεται στο $x_0 = 1$ και $f(-1) = -2 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 + 2 = 4$

Ακόμη

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^2) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x^2) = -\infty$$

Τα πρόσημα της f' , η μονοτονία, τα ακρότατα της f και τα όρια της στα άκρα του πεδίου ορισμού της φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\emptyset$	$-$	
$f(x)$	$-\infty$		4		$-\infty$

Οπότε

στο διάστημα $A_1 = (-\infty, 1]$ η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα άρα

$$f(A_1) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), f(1) \right] = (-\infty, 4]$$

στο διάστημα $A_2 = [1, +\infty)$ η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα άρα

$$f(A_2) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), f(1) \right] = (-\infty, 4]$$

Επομένως το σύνολο τιμών της f είναι το

$$f(A) = f(A_1) \cup f(A_2) = (-\infty, 4]$$

25.9 4)

Η f ως πολυωνυμική, είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της με $f'(x) = 2x$

Η f' μηδενίζεται στο $x_0 = 0$ και $f(0) = 0^2 = 0$

Ακόμη

$$f(-2) = (-2)^2 = 4$$

$$f(3) = 3^2 = 9$$

Τα πρόσημα της f' , η μονοτονία, τα ακρότατα της f και τα όρια της στα άκρα του πεδίου ορισμού της φαίνονται στον διπλανό πίνακα

x	$-\infty$	-2		0		3	$+\infty$
$f'(x)$			$-$	0	$+$		
$f(x)$		4		0		9	

Οπότε

στο διάστημα $A_1 = [-2, 0]$ είναι $f \searrow \Rightarrow f(A_1) = [f(0), f(-2)] = [0, 4]$

στο διάστημα $A_2 = [0, 3]$ είναι $f \nearrow \Rightarrow f(A_2) = [f(0), f(3)] = [0, 9]$

Επομένως το σύνολο τιμών της f είναι το $f(A) = f(A_1) \cup f(A_2) = [0, 9]$

25.9 5)

Η f ως πολυωνυμική, είναι παραγωγίσιμη στο $D_f = [-1, 3]$ με

$$f'(x) = 2x - 4 = 2(x - 2)$$

Η f' μηδενίζεται στο $x_0 = 2$ και $f(-2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 1 = -3$

Ακόμη $f(-1) = (-1)^2 - 4(-1) + 1 = 6$ και $f(3) = 3^2 - 4 \cdot 3 + 1 = -2$

Τα πρόσημα της f' , η μονοτονία, τα ακρότατα και οι τιμές της f στα άκρα του πεδίου ορισμού της φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	-1	2	3	$+\infty$
$f'(x)$			-	+	
$f(x)$		6	-3	-2	

Οπότε

στο διάστημα $A_1 = [-1, 2]$ η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα άρα

$$f(A_1) = [f(2), f(-1)] = [-3, 6]$$

στο διάστημα $A_2 = [2, 3]$ η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα άρα

$$f(A_2) = [f(2), f(3)] = [-3, -2]$$

Επομένως το σύνολο τιμών της f είναι το

$$f(A) = f(A_1) \cup f(A_2) = [-3, 6]$$

25.9 6)

Η f ως πολυωνυμική, έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό με

$$f'(x) = -3x^2 + 6x + 9 = -3(x^2 - 2x - 3)$$

$$\text{Είναι } \Delta = 16, \quad x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm 4}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{2+4}{2} = 3 \\ x_2 = \frac{2-4}{2} = -1 \end{cases}$$

οπότε η f' μηδενίζεται στο $x_1 = -1$ και στο $x_2 = 3$ με

$$f(-1) = -(-1)^3 + 3(-1)^2 + 9(-1) + 5 = -10$$

$$f(3) = -3^3 + 3 \cdot 3^2 + 9 \cdot 3 + 5 = 32$$

Ακόμη

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^3) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^3) = -\infty$$

Τα πρόσημα της f' , η μονοτονία, τα ακρότατα και τα όρια της f στα άκρα του πεδίου ορισμού της φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$
$f'(x)$		-	+	-
$f(x)$	$+\infty$	-10	32	$-\infty$

Οπότε

στο διάστημα $A_1 = (-\infty, -1]$ η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα άρα

$$f(A_1) = [f(-1), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)] = [-10, +\infty)$$

στο διάστημα $A_2 = [-1, 3]$ η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα άρα

$$f(A_2) = [f(-1), f(3)] = [-10, 32]$$

στο διάστημα $A_3 = [3, +\infty)$ η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα άρα

$$f(A_3) = (\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), f(3)] = (-\infty, 32]$$

Επομένως το σύνολο τιμών της f είναι το

$$f(A) = f(A_1) \cup f(A_2) \cup f(A_3) = \mathbb{R}$$

25.9 7)

Η f ως πολωνυμική, είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της με

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$$

Η f' μηδενίζεται στο $x_0 = 0$ και $f(0) = 0^2 = 0$

Ακόμη

$$f(-2) = (-2)^2 = 4$$

$$f(3) = 3^2 = 9$$

Τα πρόσημα της f' , η μονοτονία, τα ακρότατα της f και τα όρια της στα άκρα του πεδίου ορισμού της φαίνονται στον διπλανό πίνακα

x	-3	0	2	4			
f'(x)		+	0	-	0	+	
f(x)							
		-2	0	-4	16		

Οπότε

στο διάστημα $A_1 = [-3, 0]$ είναι $f \nearrow \Rightarrow f(A_1) = [f(-3), f(0)] = [-2, 0]$

στο διάστημα $A_2 = [0, 2]$ είναι $f \searrow \Rightarrow f(A_2) = [f(2), f(0)] = [-4, 0]$

στο διάστημα $A_3 = [2, 4]$ είναι $f \nearrow \Rightarrow f(A_3) = [f(2), f(4)] = [-4, 16]$

Επομένως το σύνολο τιμών της f είναι το $f(A) = f(A_1) \cup f(A_2) \cup f(A_3) = [-4, 16]$

25.9 8)

Η f ως πολωνυμική, έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό με

$$f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1) = 4x(x - 1)(x + 1)$$

Η f' μηδενίζεται στο $x_1 = -1$ στο $x_2 = 0$ και στο $x_3 = 1$ με

$$f(-1) = (-1)^4 - 2(-1)^2 = -1$$

$$f(0) = 0^4 - 2 \cdot 0^2 = 0$$

και

$$f(1) = 1^4 - 2 \cdot 1^2 = -1$$

Ακόμη

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^4) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^4) = +\infty$$

Τα πρόσημα της f' , η μονοτονία, τα ακρότατα και τα όρια της f στα άκρα του πεδίου ορισμού της φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$		
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+		
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\boxed{-1}$	$\nearrow$	$\boxed{0}$	$\searrow$	$\boxed{-1}$	$\nearrow$	$+\infty$

Οπότε

στο διάστημα $A_1 = (-\infty, -1]$ η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα άρα

$$f(A_1) = [f(-1), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)] = [-1, +\infty)$$

στο διάστημα $A_2 = [-1, 0]$ η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα άρα

$$f(A_2) = [f(-1), f(0)] = [-1, 0]$$

στο διάστημα $A_3 = [0, 1]$ η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα άρα

$$f(A_3) = [f(0), f(1)] = [0, 1]$$

στο διάστημα $A_4 = [1, +\infty)$ η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα άρα

$$f(A_4) = [f(1), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)] = [-1, +\infty)$$

Επομένως το σύνολο τιμών της f είναι το

$$f(A) = f(A_1) \cup f(A_2) \cup f(A_3) \cup f(A_4) = [-1, +\infty)$$

25.9 9)

Η f ως πολωνυμική, έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό με

$$f'(x) = -12x^3 + 24x^2 + 12x - 24 = -12(x^3 - 2x^2 - x + 2) =$$

παραγοντοποίηση με Horner

$$= -12(x-1)(x+1)(x-2)$$

Η f' μηδενίζεται στο $x_1 = -1$ στο $x_2 = 1$ και στο $x_3 = 2$ με

$$f(-1) = -3(-1)^4 + 8(-1)^3 + 6(-1)^2 - 24(-1) - 20 = -1$$

$$f(1) = -3 \cdot 1^4 + 8 \cdot 1^3 + 6 \cdot 1^2 - 24 \cdot 1 - 20 = -37$$

και

$$f(2) = -3 \cdot 2^4 + 8 \cdot 2^3 + 6 \cdot 2^2 - 24 \cdot 2 - 20 = -28$$

Ακόμη

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-3x^4) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-3x^4) = -\infty$$

Τα πρόσημα της f' , η μονοτονία, τα ακρότατα και τα όρια της f στα άκρα του πεδίου ορισμού της φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	-1		1		2	$+\infty$		
$f'(x)$	+	0	-	0	+	0	-		
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\boxed{-1}$	$\searrow$	$\boxed{-37}$	$\nearrow$	$\boxed{-28}$	$\searrow$	$-\infty$

Οπότε

στο διάστημα $A_1 = (-\infty, -1]$ η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα άρα

$$f(A_1) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), f(-1) \right] = (-\infty, -1]$$

στο διάστημα $A_2 = [-1, 1]$ η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα άρα

$$f(A_2) = [f(1), f(-1)] = [-37, -1]$$

στο διάστημα $A_3 = [1, 2]$ η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα άρα

$$f(A_3) = [f(1), f(2)] = [-37, -28]$$

στο διάστημα $A_4 = [1, +\infty)$ η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα άρα

$$f(A_4) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), f(-1) \right] = (-\infty, -28]$$

Επομένως το σύνολο τιμών της f είναι το

$$f(A) = f(A_1) \cup f(A_2) \cup f(A_3) \cup f(A_4) = \boxed{(-\infty, -1]}$$

25.9 10)

Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό ως ρητή με

$$f'(x) = \frac{2x(x^2+1) - x^2 \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{\cancel{2x^3} + 2x - \cancel{2x^3}}{(x^2+1)^2} = \frac{2x}{(x^2+1)^2}$$

Η f' μηδενίζεται στο $x_1 = 0$ με $f(0) = 0$

Ακόμη

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

Τα πρόσημα της f' , η μονοτονία, τα ακρότατα και τα όρια της f στα άκρα του πεδίου ορισμού της φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		$\ominus$	$+$
$f(x)$	1	$\boxed{0}$	1

Οπότε

στο διάστημα $A_1 = (-\infty, 0]$ η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα άρα

$$f(A_1) = \left[f(0), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right) = [0, 1)$$

στο διάστημα $A_2 = [0, +\infty)$ η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα άρα

$$f(A_2) = \left[f(0), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = [0, 1)$$

Επομένως το σύνολο τιμών της f είναι το

$$f(A) = f(A_1) \cup f(A_2) = \boxed{[0, 1]}$$

25.9 11)

Η f , έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό ως ρητή με

$$f'(x) = \frac{4(x^2+1) - 4x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{4x^2 + 4 - 8x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{4 - 4x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{4(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$$

Η f' μηδενίζεται στο $x_0 = -1$ και στο $x_0 = 1$ και

$$\text{είναι } f(-1) = \frac{-4}{(-1)^2 + 1} = -2 \text{ και } f(1) = \frac{4}{1^2 + 1} = 2$$

$$\text{Ακόμη } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x}{x^2} = 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x}{x^2} = 0$$

Τα πρόσημα της f' , η μονοτονία, τα ακρότατα και τα όρια της f στα άκρα του πεδίου ορισμού της φαίνονται στον διπλανό πίνακα

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	0 ↘	-2	↗	2	↘ 0

Οπότε

$$\text{στο διάστημα } A_1 = (-\infty, -1] \text{ είναι } f \searrow \Rightarrow f(A_1) = \left[f(-1), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right] = [-2, 0)$$

$$\text{στο διάστημα } A_2 = [-1, 1] \text{ είναι } f \nearrow \Rightarrow f(A_2) = \left[f(-1), f(1) \right] = [-2, 2]$$

$$\text{στο διάστημα } A_3 = [1, +\infty) \text{ είναι } f \searrow \Rightarrow f(A_3) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), f(1) \right] = (0, 2]$$

Επομένως το σύνολο τιμών της f είναι το

$$f(A) = f(A_1) \cup f(A_2) \cup f(A_3) = [-2, 2]$$

25.9 12)

Η f , έχει πεδίο ορισμού το $(-\infty, -3) \cup (-3, 3) \cup (3, +\infty)$ και είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό ως ρητή με

$$f'(x) = \frac{x^2 - 9 - 2x(x-5)}{(x^2 - 9)^2} = \frac{x^2 - 9 - 2x^2 + 10x}{(x^2 - 9)^2} = \frac{-x^2 + 10x - 9}{(x^2 - 9)^2}$$

$$\Delta = 100 - 36 = 64, \quad x_{1,2} = \frac{-10 \pm \sqrt{64}}{-2} = \frac{-10 \pm 8}{-2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-10+8}{-2} = -1 \\ x_2 = \frac{-10-8}{-2} = 9 \end{cases}$$

$$\text{Είναι } -x^2 + 10x - 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1 \text{ ή } x = 9$$

Άρα η f' μηδενίζεται στο $x_0 = 1$ και στο $x_0 = 9$ και

$$\text{είναι } f(1) = \frac{1-5}{1^2-9} = \frac{-4}{-8} = \frac{1}{2} \text{ και } f(9) = \frac{9-5}{9^2-9} = \frac{4}{72} = \frac{1}{18}$$

Ακόμη

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{x-5}{(x-3)(x+3)} = \lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{x-5}{x-3} \cdot \lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{1}{x+3} = \frac{-8}{-6} \cdot (-\infty) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{x-5}{(x-3)(x+3)} = \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{x-5}{x-3} \cdot \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{1}{x+3} = \frac{-8}{-6} \cdot (+\infty) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x-5}{(x-3)(x+3)} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x-5}{x+3} \cdot \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{1}{x-3} = \frac{-2}{6} \cdot (-\infty) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x-5}{(x-3)(x+3)} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x-5}{x+3} \cdot \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{x-3} = \frac{-2}{6} \cdot (+\infty) = -\infty$$

$$\text{και } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2} = 0$$

Τα πρόσημα της f' , η μονοτονία, τα ακρότατα και τα όρια της f στα άκρα του πεδίου ορισμού της φαίνονται στον διπλανό πίνακα

x	$-\infty$	-3	1	3	9	$+\infty$	
$f'(x)$	-	-	0	+	+	0	-
$f(x)$	0 ↘ $-\infty$	↘ $+\infty$	↘ $+\infty$	↗ $-\infty$	↗ $-\infty$	↘ $+\infty$	↘ $+\infty$

Οπότε

στο διάστημα $A_1 = (-\infty, -3)$ είναι

$$f \searrow \Rightarrow f(A_1) = \left(\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right) = (-\infty, 0)$$

στο διάστημα $A_2 = (-3, 1]$ είναι $f \searrow \Rightarrow f(A_2) = \left[f(1), \lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) \right) = \left[\frac{1}{18}, +\infty \right)$

στο διάστημα $A_3 = [1, 3)$ είναι $f \nearrow \Rightarrow f(A_3) = \left[f(1), \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) \right) = \left[\frac{1}{18}, +\infty \right)$

στο διάστημα $A_4 = (3, 9]$ είναι $f \nearrow \Rightarrow f(A_4) = \left(\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x), f(9) \right] = \left(-\infty, \frac{1}{2} \right]$

στο διάστημα $A_5 = [9, +\infty)$ είναι $f \searrow \Rightarrow f(A_5) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), f(9) \right] = \left(0, \frac{1}{2} \right]$

Επομένως το σύνολο τιμών της f είναι το

$$f(A) = f(A_1) \cup f(A_2) \cup f(A_3) \cup f(A_4) \cup f(A_5) = \left(-\infty, \frac{1}{18} \right] \cup \left[\frac{1}{2}, +\infty \right)$$

25.9 13)

Η f έχει πεδίο ορισμού το $[0, +\infty)$, και είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(x+1) - \sqrt{x}}{(x+1)^2} = \frac{x+1-2x}{2\sqrt{x}(x+1)^2} = \frac{1-x}{2\sqrt{x}(x+1)^2}$$

Η f' μηδενίζεται στο $x_1 = 1$ με

$$f(1) = \frac{\sqrt{1}}{1+1} = \frac{1}{2}$$

Ακόμη

$$f(0) = \frac{\sqrt{0}}{0+1} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{x \left(1 + \frac{1}{x} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x} \left(1 + \frac{1}{x} \right)} = 0$$

Τα πρόσημα της f' , η μονοτονία, τα ακρότατα οι τιμές και τα όρια της f στα άκρα του πεδίου ορισμού της φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
$f'(x)$			+	0	-
$f(x)$			$\boxed{0}$	$\boxed{\frac{1}{2}}$	0

$\boxed{0} \searrow$

$\boxed{\frac{1}{2}} \searrow$

$\rightarrow 0$

Οπότε

στο διάστημα $A_1 = [0, 1]$ η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα άρα

$$f(A_1) = [f(0), f(1)] = \left[0, \frac{1}{2} \right]$$

στο διάστημα $A_2 = [1, +\infty)$ η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα άρα

$$f(A_2) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), f(1) \right] = \left(0, \frac{1}{2} \right]$$

Επομένως το σύνολο τιμών της f είναι το $f(A) = f(A_1) \cup f(A_2) = \left[0, \frac{1}{2}\right]$

25.9 14)

Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $f'(x) = e^x - 1$

Η f' μηδενίζεται στο $x_1 = 0$ με $f(0) = e^0 - 0 + 3 = 4$

Ακόμη

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x - x + 3) = 0 - (-\infty) + 3 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x + 3) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x \left(1 - \frac{x}{e^x} + \frac{3}{e^x}\right) \stackrel{\frac{0}{0}}{\underset{\text{DLH}}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0}} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0 \quad (+\infty)(1 - 0 + 0) = +\infty$$

Τα πρόσημα της f' , η μονοτονία, τα ακρότατα και τα όρια της f στα άκρα του πεδίου ορισμού της φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\emptyset$	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\boxed{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

Οπότε

στο διάστημα $A_1 = (-\infty, 0]$ η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα άρα

$$f(A_1) = \left[f(0), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)\right] = [4, +\infty)$$

στο διάστημα $A_2 = [0, +\infty)$ η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα άρα

$$f(A_2) = \left[f(0), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)\right] = [4, +\infty)$$

Επομένως το σύνολο τιμών της f είναι το

$$f(A) = f(A_1) \cup f(A_2) = \boxed{[4, +\infty)}$$

25.9 15)

Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό ως πράξεις

παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$

Η f' μηδενίζεται στο $x_1 = 0$ με $f(0) = \ln(0^2 + 1) = 0$

Ακόμη

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(x^2 + 1) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x^2 + 1) = +\infty$$

Τα πρόσημα της f' , η μονοτονία, τα ακρότατα και τα όρια της f στα άκρα του πεδίου ορισμού της φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\emptyset$	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\boxed{0}$	$\nearrow$	$+\infty$

Οπότε

στο διάστημα $A_1 = (-\infty, 0]$ η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα άρα

$$f(A_1) = \left[f(0), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right) = [0, +\infty)$$

στο διάστημα $A_2 = [0, +\infty)$ η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα άρα

$$f(A_2) = \left[f(0), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = [0, +\infty)$$

Επομένως το σύνολο τιμών της f είναι το

$$f(A) = f(A_1) \cup f(A_2) = [0, +\infty)$$

25.9 16)

Η f , έχει πεδίο ορισμού το $A = (0, +\infty)$ και είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό ως

$$\text{πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με } f'(x) = \frac{x \frac{1}{x} - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

$$\text{Η } f' \text{ μηδενίζεται στο } x_0 = e \text{ και είναι } f(e) = \frac{\ln e}{e} = \frac{1}{e}$$

$$\text{Ακόμη } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{-\infty}{0^+} = (-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} \stackrel{\frac{+\infty}{+\infty}}{=} \lim_{\text{DLH } x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

Τα πρόσημα της f' , η μονοτονία, τα ακρότατα και τα όρια της f στα άκρα του πεδίου ορισμού της φαίνονται στον διπλανό πίνακα

x	$-\infty$	0	e	$+\infty$
$f'(x)$			+	-
$f(x)$			$\frac{1}{e}$	

Οπότε

$$\text{στο διάστημα } A_1 = (0, e] \text{ είναι } f \nearrow \Rightarrow f(A_1) = \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), f(1) \right] = \left(-\infty, \frac{1}{e} \right]$$

$$\text{στο διάστημα } A_2 = [e, +\infty) \text{ είναι } f \searrow \Rightarrow f(A_2) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), f(1) \right] = \left(0, \frac{1}{e} \right]$$

$$\text{Επομένως το σύνολο τιμών της } f \text{ είναι το } f(A) = f(A_1) \cup f(A_2) = \left(-\infty, \frac{1}{e} \right]$$

25.9 17)

Η f , έχει πεδίο ορισμού το $A = (0, +\infty)$ και είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό ως διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f'(x) = 2x - \frac{2}{x} = \frac{2x^2 - 2}{x} = \frac{2(x^2 - 1)}{x} = \frac{2(x-1)(x+1)}{x}$$

$$\text{Είναι } f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{2(x-1)(x+1)}{x} = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ ή } x = -1 \text{ απορρίπτεται}$$

$$\text{Οπότε η } f' \text{ μηδενίζεται στο } x_0 = 1 \text{ και είναι } f(1) = 1^2 - 2 \ln 1 = 1$$

$$\text{Ακόμη } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 - 2(-\infty) = +\infty \text{ και}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 2 \ln x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(1 - \frac{2 \ln x}{x^2} \right) \stackrel{\frac{0}{+\infty}}{=} \lim_{\text{DLH } x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2}{x}}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x^2} = 0 \\ &= (+\infty)(1 - 0) = +\infty \end{aligned}$$

Τα πρόσημα της f' , η μονοτονία, τα ακρότατα και τα όρια της f στα άκρα του πεδίου ορισμού της φαίνονται στον διπλανό πίνακα

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		$+\infty$	$\boxed{1}$	$+\infty$

Οπότε

στο διάστημα $A_1 = (0, 1]$ είναι $f \searrow \Rightarrow f(A_1) = \left[f(1), \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \right) = [1, +\infty)$

στο διάστημα $A_2 = [1, +\infty)$ είναι $f \nearrow \Rightarrow f(A_2) = \left[f(1), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = [1, +\infty)$

Επομένως το σύνολο τιμών της f είναι το $f(A) = f(A_1) \cup f(A_2) = [1, +\infty)$

25.9 18)

Η f έχει πεδίο ορισμού το $[-2, 2]$ και είναι παραγωγίσιμη στο $(-2, 2)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x\sqrt{4-x^2} + (x^2+5) \frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}} = \frac{2x(4-x^2) - x^3 - 5x}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{8x - 2x^3 - x^3 - 5x}{\sqrt{4-x^2}} = \\ &= \frac{3x - 3x^3}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{3x(1-x^2)}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{3x(1-x)(1+x)}{\sqrt{4-x^2}} \end{aligned}$$

Η f' μηδενίζεται στο $x_1 = -1$ στο $x_2 = 0$ και στο $x_3 = 1$ με

$$f(-1) = [(-1)^2 + 5]\sqrt{4 - (-1)^2} = 6\sqrt{3}$$

$$f(0) = [0^2 + 5]\sqrt{4 - 0^2} = 10$$

και

$$f(1) = (1^2 + 5)\sqrt{4 - 1^2} = 6\sqrt{3}$$

Ακόμη

$$f(-2) = [(-2)^2 + 5]\sqrt{4 - (-2)^2} = 0$$

$$f(2) = (2^2 + 5)\sqrt{4 - 2^2} = 0$$

Τα πρόσημα της f' , η μονοτονία, τα ακρότατα και οι τιμές της f στα άκρα του πεδίου ορισμού της φαίνονται στον διπλανό πίνακα

x	-2	-1	0	1	2
$f'(x)$		+	0	-	0
$f(x)$	$\boxed{0}$	$\boxed{6\sqrt{3}}$	$\boxed{10}$	$\boxed{6\sqrt{3}}$	$\boxed{0}$

Οπότε

στο διάστημα $A_1 = [-2, -1]$ η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα άρα

$$f(A_1) = [f(-2), f(-1)] = [0, 6\sqrt{3}]$$

στο διάστημα $A_2 = [-1, 0]$ η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα άρα

$$f(A_2) = [f(0), f(-1)] = [10, 6\sqrt{3}]$$

στο διάστημα $A_3 = [0, 1]$ η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα άρα

$$f(A_3) = [f(0), f(1)] = [10, 6\sqrt{3}]$$

στο διάστημα $A_4 = [1, 2]$ η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα άρα

$$f(A_4) = [f(2), f(1)] = [0, 6\sqrt{3}]$$

Επομένως το σύνολο τιμών της f είναι το

$$f(A) = f(A_1) \cup f(A_2) \cup f(A_3) \cup f(A_4) = [0, 6\sqrt{3}]$$