

Η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο $[α, β]$, ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων

είναι παραγωγίσιμη στο $(α, β)$, ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων

$$f(α) = f(β) = 0$$

Οπότε για τη συνάρτηση f ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[α, β]$ και επομένως υπάρχει $ξ ∈ (α, β)$ τέτοιο ώστε $f'(ξ) = 0$

Επειδή $f''(x) < 0$ για κάθε $x ∈ [α, β]$ η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $[α, β]$

Οπότε

$$\text{για κάθε } x ∈ (α, ξ) \Rightarrow x < ξ \xRightarrow{f' \searrow} f'(x) > f'(ξ) \xRightarrow{f'(ξ)=0} f'(x) > 0$$

$$\text{για κάθε } x ∈ (ξ, β) \Rightarrow x > ξ \xRightarrow{f' \searrow} f'(x) < f'(ξ) \xRightarrow{f'(ξ)=0} f'(x) < 0$$

Επομένως

η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[α, ξ]$

η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[ξ, β]$

Ισχύει δηλαδή ο παρακάτω πίνακας μονοτονίας

x	$-\infty$	α		ξ		β	$+\infty$
$f'(x)$			+	0	-		
$f(x)$							

Άρα

$$\text{για κάθε } x ∈ (α, ξ) \Rightarrow x > α \xRightarrow{f \nearrow} f(x) > f(α) \xRightarrow{f(α)=0} f(x) > 0 \quad (1)$$

$$\text{για κάθε } x ∈ (ξ, β) \Rightarrow x < β \xRightarrow{f \searrow} f(x) > f(β) \xRightarrow{f(β)=0} f(x) > 0 \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow f(x) > 0 \quad \text{για κάθε } x ∈ (α, β)$$