

α) Το κέρδος (κέρδος = έσοδα - έξοδα) της βιομηχανίας δίνεται από την συνάρτηση

$$f(x) = E(x) - K(x) = x^2 + \alpha(1-x)^2 - \alpha x^2 = x^2 + \alpha(1-2x+x^2) - \alpha x^2 =$$

$$= x^2 + \alpha - 2\alpha x + \cancel{\alpha x^2} - \cancel{\alpha x^2} = x^2 - 2\alpha x + \alpha, \quad x > 0$$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ ως πολυωνυμική με

$$f'(x) = 2x - 2\alpha = 2(x - \alpha)$$

Έτσι η f' μηδενίζεται στο $x_0 = \alpha$ με $f(\alpha) = \alpha^2 - 2\alpha^2 + \alpha = -\alpha^2 + \alpha$

Τα πρόσημα της f' , η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα μονοτονίας

x	$-\infty$	0	α	$+\infty$
$f'(x)$			$-$	$+$
$f(x)$				

$\swarrow$ $-\alpha^2 + \alpha$ $\searrow$
 ολικό
ελάχιστο

Από τον παραπάνω πίνακα προκύπτει ότι η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x_0 = \alpha$.

Άρα η ποσότητα x_0 για την οποία έχουμε το ελάχιστο κέρδος είναι $x_0 = \alpha$ ίσο με $-\alpha^2 + \alpha$

β) Προφανώς είναι $M(\alpha) = -\alpha^2 + \alpha, \quad \alpha \in [0, 2]$

Η συνάρτηση M είναι παραγωγίσιμη στο $[0, 2]$ ως πολυωνυμική με

$$M'(\alpha) = -2\alpha + 1$$

Έτσι η M' μηδενίζεται στο $x_0 = \frac{1}{2}$ με $M\left(\frac{1}{2}\right) = -\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

Τα πρόσημα της M' , η μονοτονία και τα ακρότατα της M φαίνονται στον παρακάτω πίνακα μονοτονίας

α	$-\infty$	0	$\frac{1}{2}$	2	$+\infty$
$M'(\alpha)$			$+$	$-$	
$M(\alpha)$					

$\swarrow$ $\frac{1}{4}$ $\searrow$
 ολικό
μέγιστο

Από τον παραπάνω πίνακα προκύπτει ότι η M παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο

$$\alpha_0 = \frac{1}{2} \quad \text{ίσο με} \quad \frac{1}{4}$$