

Θεωρούμε την συνάρτηση f με $f(x) = x^\alpha - \alpha x$, $x \in (0, +\infty)$

Η f στο $(0, +\infty)$ είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με

$$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1} - \alpha = \alpha(x^{\alpha-1} - 1)$$

Η f' μηδενίζεται στο $x_0 = 1$ με $f(1) = 1^\alpha - \alpha \cdot 1 = 1 - \alpha$

Τα πρόσημα της f' , η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα μονοτονίας

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$			+	-
$f(x)$			$1-\alpha$	

Έτσι

$$\text{για κάθε } 0 < x \leq 1 \stackrel{f'}{\Rightarrow} f(x) \leq f(1) \Rightarrow f(x) \leq 1 - \alpha$$

$$\text{για κάθε } x \geq 1 \stackrel{f'}{\Rightarrow} f(x) \leq f(1) \Rightarrow f(x) \leq 1 - \alpha$$

$$\text{Άρα για κάθε } x > 0 \text{ είναι } f(x) \leq 1 - \alpha \Rightarrow x^\alpha - \alpha x \leq 1 - \alpha$$