Γ ΛΥΚΕΙΟΥ ΜΕΡΟΣ Β

25.61

α) Η σχέση για $x=0$ γίνεται $e^0 > 2\cdot 0 \Leftrightarrow 1>0$ που προφανώς ισχύει

Θεωρούμε την συνάρτηση f με $f(x)=\dfrac{e^x}{x}$, $x\in(0,+\infty)$

Η f στο $(0,+\infty)$ είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων ,
με $f'(x)=\dfrac{e^x x-e^x}{x^2}=\dfrac{e^x(x-1)}{x^2}$

Η f' μηδενίζεται στο $x_o=1$ με $f(e)=\dfrac{e^1}{1}=e$

Τα πρόσημα της f' , η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα μονοτονίας

x	$-\infty$	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$		‖	$\searrow$	e	$\nearrow$	

Έτσι

για κάθε $0<\boxed{x\le 1}\overset{f\searrow}{\Longrightarrow} f(x)\ge f(1)\Rightarrow \boxed{f(x)\ge e}$

για κάθε $\boxed{x\ge 1}\overset{f\nearrow}{\Longrightarrow} f(x)\ge f(1)\Rightarrow \boxed{f(x)\ge e}$

Άρα $\boxed{\text{για κάθε } x>0}$ είναι $f(x)\ge e\Rightarrow \dfrac{e^x}{x}\ge e\overset{e>2}{\Longrightarrow}\dfrac{e^x}{x}>2\overset{x>0}{\Longrightarrow}\boxed{e^x>2x}$

Οπότε τελικά η σχέση $e^x>2x$ ισχύει για κάθε $x\ge 0$

β) Θεωρούμε την συνάρτηση f με $f(x)=e^x-x^2-1$, $x\in[0,+\infty)$
Η f στο $[0,+\infty)$ είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων ,
με $f'(x)=e^x-2x$
Από το ερώτημα α) προκύπτει ότι είναι $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$ οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$. Επομένως για κάθε $x\in[0,+\infty)$ έχουμε

$$x\ge 0\overset{f\nearrow}{\Longrightarrow} f(x)\ge f(0)\Rightarrow e^x-x^2-1\ge e^0-0^2-1\Rightarrow e^x-x^2-1\ge 0\Rightarrow \boxed{e^x\ge x^2+1}$$