Γ ΛΥΚΕΙΟΥ ΜΕΡΟΣ Β

25.59

Η f , έχει πεδίο ορισμού το $A=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ και είναι παραγωγίσιμη σ΄ αυτό ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f'(x)=e^{\frac{1}{x}}+\cancel{x}e^{\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x^{\cancel{2}}}\right)=e^{\frac{1}{x}}-\frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{1}{x}}\left(1-\frac{1}{x}\right)=\frac{x-1}{x}e^{\frac{1}{x}}$$

Η f' μηδενίζεται στο $x_o=1$ και είναι $f(1)=1\cdot e^{\frac{1}{1}}=e$

Ακόμη

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}xe^{\frac{1}{x}}\overset{\substack{\text{θέτουμε } y=\frac{1}{x}\\ \text{όταν } x\to-\infty,\ y\to 0^-\\ \lim_{x\to-\infty}e^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0^-}e^{y}=e^0}}{=}(-\infty)\cdot e^0=-\infty\cdot1=-\infty$$

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}xe^{\frac{1}{x}}\overset{\substack{\text{θέτουμε } y=\frac{1}{x}\\ \text{όταν } x\to0^-,\ y\to-\infty\\ \lim_{x\to0^-}e^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to-\infty}e^{y}=0}}{=}0\cdot0=0$$

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}xe^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0^+}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}}\overset{\substack{\text{θέτουμε } y=\frac{1}{x}\\ \text{όταν } x\to0^+,\ y\to+\infty}}{=}\lim_{y\to+\infty}\frac{e^y}{y}\underset{DLH}{\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^y}{1}=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}xe^{\frac{1}{x}}\overset{\substack{\text{θέτουμε } y=\frac{1}{x}\\ \text{όταν } x\to+\infty,\ y\to0^+\\ \lim_{x\to+\infty}e^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0^+}e^{y}=e^0}}{=}(+\infty)\cdot e^0=+\infty$$

Τα πρόσημα της f' , η μονοτονία , τα ακρότατα και τα όρια της f στα άκρα του πεδίου ορισμού της φαίνονται στον διπλανό πίνακα

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0 ‖ $+\infty$	$\searrow$	$\boxed{e}$	$\nearrow$	$+\infty$

Οπότε

α) στο διάστημα $A_1=(-\infty,0)$ είναι $f\nearrow\Rightarrow f(A_1)=\left(\lim_{x\to-\infty}f(x),\lim_{x\to0^-}f(x)\right)=(-\infty,0)$

στο διάστημα $A_2=(0,1]$ είναι $f\searrow\Rightarrow f(A_2)=\left[f(1),\lim_{x\to0^+}f(x)\right)=[e,+\infty)$

στο διάστημα $A_3=[1,+\infty)$ είναι $f\nearrow\Rightarrow f(A_3)=\left[f(1),\lim_{x\to+\infty}f(x)\right)=[e,+\infty)$

Επομένως το σύνολο τιμών της f είναι το
$f(A)=f(A_1)\cup f(A_2)\cup f(A_2)=(-\infty,0)\cup[e,+\infty)$

β) Παρατηρούμε ότι το 3 δεν περιέχεται στο διάστημα $f(A_1)$ και περιέχεται στα διαστήματα $f(A_2)$ και $f(A_3)$ και επειδή η f είναι γνησίως μονότονη σε καθένα από τα διαστήματα A_2 και A_3 συμπεραίνουμε ότι η εξίσωση $f(x)=3$ έχει ακριβώς δύο ρίζες στο R

γ) Οι δύο παραπάνω ρίζες ανήκουν στα διαστήματα $(0,1)$ και $(1,+\infty)$ άρα προφανώς είναι και οι δύο θετικές. Επομένως η εξίσωση $f(x)=3$ έχει δύο θετικές ρίζες

δ) Η μία από τις παραπάνω ρίζες ανήκει στο διάστημα $(0,1)$ οπότε δεν είναι μεγαλύτερη του 3. Για την άλλη τώρα που ανήκει στο διάστημα $(1,+\infty)$

έχουμε $f(3)=3\cdot e^{\frac{1}{3}}\geq 3$

οπότε η ρίζα βρίσκεται στο διάστημα $(1,3)$ άρα δεν είναι μεγαλύτερη του 3
Επομένως η εξίσωση $f(x)=3$ δεν έχει ρίζες μεγαλύτερες του 3

ε) Παρατηρούμε ότι το -2 περιέχεται στο διάστημα $f(A_1)$ και δεν περιέχεται στα διαστήματα $f(A_2)$ και $f(A_3)$ και επειδή η f είναι γνησίως μονότονη από τα διάστημα A_1 συμπεραίνουμε ότι η εξίσωση $f(x)=-2$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο R