

Θεωρούμε την συνάρτηση f με $f(x) = x^2 - 2e \ln x$

Η f έχει πεδίο ορισμού το $(0, +\infty)$ και είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f'(x) = 2x - \frac{2e}{x} = \frac{2x^2 - 2e}{x} = \frac{2(x^2 - e)}{x} = \frac{2(x - \sqrt{e})(x + \sqrt{e})}{x}$$

Η f' μηδενίζεται στο $x_1 = \sqrt{e}$ με

$$f(\sqrt{e}) = \sqrt{e}^2 - 2e \ln \sqrt{e} = e - 2e \cdot \frac{1}{2} = 0. \text{ Δηλαδή η } x_0 = \sqrt{e} \text{ είναι ρίζα της } f$$

Ακόμη

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 - 2e \ln x) = 0^2 - 2e(-\infty) = +\infty$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 2e \ln x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(1 - 2e \frac{\ln x}{x^2} \right) \stackrel{\frac{0}{0}}{\underset{\text{DLH}}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x^2} = 0 \\ &= +\infty \cdot (1 - 2e \cdot 0) = +\infty \end{aligned}$$

Τα πρόσημα της f' , η μονοτονία, τα ακρότατα και τα όρια της f στα άκρα του πεδίου ορισμού της φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	0	$\sqrt{e}$	$+\infty$
$f'(x)$			$-$	$+$
$f(x)$		$+\infty$	0	$+\infty$

Οπότε

στο διάστημα $A_1 = (0, \sqrt{e}]$ η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα με

$$f(A_1) = \left[f(\sqrt{e}), \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \right) = [0, +\infty)$$

Άρα η f έχει μία ακριβώς ρίζα (την $x_0 = \sqrt{e}$) στο διάστημα $A_1 = (0, \sqrt{e}]$

στο διάστημα $A_2 = [\sqrt{e}, +\infty)$ η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα με

$$f(A_2) = \left[f(\sqrt{e}), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = [0, +\infty)$$

Άρα η f έχει μία ακριβώς ρίζα (πάλι όμως την $x_0 = \sqrt{e}$) και στο διάστημα $A_2 = [\sqrt{e}, +\infty)$

Επομένως η f , άρα και η εξίσωση $x^2 - 2e \ln x = 0$, έχει ακριβώς μία ρίζα (την $x_0 = \sqrt{e}$) στο διάστημα $(0, +\infty)$