

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι

$$f'(x) = 2x - 4\alpha$$

Έτσι η f' μηδενίζεται στο $x_0 = 2\alpha$ με

$$f(2\alpha) = (2\alpha)^2 - 4\alpha \cdot 2\alpha - \alpha^4 = 4\alpha^2 - 8\alpha^2 - \alpha^4 = -4\alpha^2 - \alpha^4$$

Τα πρόσημα της f' η μονοτονία και τα ακρότατα της φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$		2α		$+\infty$
$f'(x)$		-	Φ	+	
$f(x)$		$\swarrow$ $-\alpha^4 - 4\alpha^2$ $\searrow$			
		ολικό ελάχιστο			

Άρα η f έχει ελάχιστο στο $x_0 = 2\alpha$ ίσο με $-\alpha^4 - 4\alpha^2$

Θεωρούμε τώρα την συνάρτηση g με $g(\alpha) = -\alpha^4 - 4\alpha^2$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Αρκεί να βρούμε τώρα για ποια τιμή του α η g παρουσιάζει μέγιστο

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική και για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ είναι

$$g'(\alpha) = -4\alpha^3 - 8\alpha = -4\alpha(\alpha^2 + 2)$$

Έτσι η g' μηδενίζεται στο $\alpha_0 = 0$

Τα πρόσημα της g' η μονοτονία και τα ακρότατα της φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

α	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(\alpha)$		+	Φ	-	
$g(\alpha)$		$\swarrow$ $\searrow$			
		ολικό μέγιστο			

Από τον παραπάνω πίνακα προκύπτει ότι η g παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $\alpha_0 = 0$ (δεν ενδιαφέρει ποιο είναι αυτό)

Επομένως η ελάχιστη τιμή της f γίνεται μέγιστη για $\alpha = 0$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι

$$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1} e^{2\alpha-x} + x^\alpha e^{2\alpha-x} \cdot (-1) = x^{\alpha-1} e^{2\alpha-x} (\alpha - x)$$

Έτσι η f' μηδενίζεται στο $x_0 = \alpha$ με $f(\alpha) = \alpha^a e^{2a-a} = \alpha^a e^a$

Τα πρόσημα της f' η μονοτονία και τα ακρότατα της φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$		$\emptyset$	
$f(x)$		$\alpha^a e^a$	

ολικό
μέγιστο

Άρα η f έχει μέγιστο στο $x_0 = \alpha$ ίσο με $\alpha^a e^a$

Θεωρούμε τώρα την συνάρτηση g με $g(\alpha) = \alpha^a e^a$, $\alpha > 0$. Αρκεί να βρούμε τώρα για ποια τιμή του α η g παρουσιάζει ελάχιστο

$$\text{Είναι } g(\alpha) = e^{\ln \alpha^a} e^a = e^{a \ln \alpha} e^a = e^{a \ln \alpha + a}$$

Οπότε η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων και για κάθε $\alpha \in (0, +\infty)$ είναι

$$g'(\alpha) = e^{a \ln \alpha + a} (a \ln \alpha + a)' = e^{a \ln \alpha + a} \left(\ln \alpha + \cancel{\frac{1}{\alpha}} + 1 \right) = e^{a \ln \alpha + a} (\ln \alpha + 2)$$

Έτσι η g' μηδενίζεται στο $\alpha_0 = e^{-2}$

Τα πρόσημα της g' η μονοτονία και τα ακρότατα της φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

α	$-\infty$	0	e^{-2}	$+\infty$
$g'(\alpha)$			$\emptyset$	
$g(\alpha)$				

ολικό
ελάχιστο

Από τον παραπάνω πίνακα προκύπτει ότι η g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $\alpha_0 = e^{-2}$ (δεν ενδιαφέρει ποιο είναι αυτό)

Επομένως η μέγιστη τιμή της f γίνεται ελάχιστη για $\alpha = e^{-2}$

25.50 3)

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολωνυμική και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι

$$f'(x) = 2x - 2$$

Έτσι η f' μηδενίζεται στο $x_0 = 1$ με $f(1) = 1^2 - 2 \cdot 1 + \lambda^2 - \lambda = \lambda^2 - \lambda - 1$

Τα πρόσημα της f' η μονοτονία και τα ακρότατα της φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$			$\lambda^2 - \lambda - 1$		
			ολικό ελάχιστο		

Άρα η f έχει ελάχιστο στο $x_0 = 1$ ίσο με $\lambda^2 - \lambda - 1$

Θεωρούμε τώρα την συνάρτηση g με $g(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 1$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Αρκεί να βρούμε τώρα για ποια τιμή του λ η g παρουσιάζει ελάχιστο

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική και για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ είναι

$$g'(\lambda) = 2\lambda - 1$$

Έτσι η g' μηδενίζεται στο $\lambda_0 = \frac{1}{2}$

Τα πρόσημα της g' η μονοτονία και τα ακρότατα της φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

λ	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$g'(\lambda)$		-	0	+	
$g(\lambda)$			$\square$		
			ολικό ελάχιστο		

Από τον παραπάνω πίνακα προκύπτει ότι η g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $\lambda_0 = \frac{1}{2}$
(δεν ενδιαφέρει ποιο είναι αυτό)

Επομένως η ελάχιστη τιμή της f γίνεται ελάχιστη για $\lambda = \frac{1}{2}$