

Γ ΛΥΚΕΙΟΥ ΜΕΡΟΣ Β

25.5 1)

α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[-1,1]$ ως πολυωνυμική και για κάθε $x \in [-1,1]$

$$\text{είναι } f'(x) = 2x$$

$$\text{Είναι } f'(x) = 0 \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0$$

Τα πρόσημα της f' η μονοτονία και τα ακρότατα της φαίνονται στον διπλανό πίνακα

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$		$\boxed{1}$ τμ	$\boxed{0}$ τε	$\boxed{1}$ τμ	

Άρα η f έχει

τοπικό μέγιστο στο $x_1 = -1$ ίσο με $f(-1) = 1$

τοπικό ελάχιστο στο $x_2 = 0$ ίσο με $f(0) = 0$

τοπικό μέγιστο στο $x_3 = 1$ ίσο με $f(1) = 1$

β) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[0, \pi]$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων και

για κάθε $x \in [0, \pi]$ είναι $f'(x) = 2\eta\mu x - 2x = 2(\eta\mu x - x) \stackrel{|\eta\mu x| \leq |x|}{\Rightarrow} f'(x) \leq 0$ (με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 0$)

Τα πρόσημα της f' η μονοτονία και τα ακρότατα της φαίνονται στον διπλανό πίνακα

x	$-\infty$	0	π	$+\infty$
$f'(x)$		0	-	
$f(x)$		$\boxed{-2}$ τμ	$\boxed{2-\pi^2}$ τε	

Άρα η f έχει

τοπικό μέγιστο στο $x_1 = 0$ ίσο με $f(0) = -2$

τοπικό ελάχιστο στο $x_2 = \pi$ ίσο με $f(\pi) = 2 - \pi^2$

25.5 2)

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[2,5]$ ως πολυωνυμική και για κάθε $x \in [2,5]$ είναι

$$f'(x) = 2 > 0$$

Τα πρόσημα της f' η μονοτονία και τα ακρότατα της φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	2	5	$+\infty$
$f'(x)$			+	
$f(x)$		$\boxed{1}$	$\boxed{7}$	

Άρα η f έχει

τοπικό ελάχιστο στο $x_1 = 2$ ίσο με $f(2) = 1$

τοπικό μέγιστο στο $x_2 = 5$ ίσο με $f(5) = 7$

25.5 3)

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[-4,1]$ ως πολυωνυμική και για κάθε $x \in [-4,1]$ είναι

$$f'(x) = -5 < 0$$

Τα πρόσημα της f' η μονοτονία και τα ακρότατα της φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	-4	1	$+\infty$
$f'(x)$			-	
f(x)		21	-4	

Άρα η f έχει

τοπικό μέγιστο στο $x_1 = -4$ ίσο με $f(-4) = 21$

τοπικό ελάχιστο στο $x_2 = 1$ ίσο με $f(1) = -4$

25.5 4)

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[0, 4]$ ως πολυωνυμική και για κάθε $x \in [0, 4]$ είναι

$$f'(x) = 4x - 8 = 4(x - 2)$$

$$\text{Είναι } f'(x) = 0 \Rightarrow 4(x - 2) = 0 \Rightarrow x = 2$$

Τα πρόσημα της f' η μονοτονία και τα ακρότατα της φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	0	2	4	$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
f(x)		1	-7	1	

Άρα η f έχει

τοπικό μέγιστο στο $x_1 = 0$ ίσο με $f(0) = 1$

τοπικό ελάχιστο στο $x_2 = 2$ ίσο με $f(2) = -7$

τοπικό μέγιστο στο $x_3 = 4$ ίσο με $f(4) = 1$

25.5 5)

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[1, 10]$ ως πολυωνυμική και για κάθε $x \in [1, 10]$ είναι

$$f'(x) = -2x + 6 = -2(x - 3)$$

$$\text{Είναι } f'(x) = 0 \Rightarrow -2(x - 3) = 0 \Rightarrow x = 3$$

Τα πρόσημα της f' η μονοτονία και τα ακρότατα της φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	1	3	10	$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	
f(x)		-2	2	47	

Άρα η f έχει

τοπικό ελάχιστο στο $x_1 = 1$ ίσο με $f(1) = -2$

τοπικό μέγιστο στο $x_2 = 3$ ίσο με $f(3) = 2$

τοπικό ελάχιστο στο $x_3 = 10$ ίσο με $f(10) = 47$

25.5 6)

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[0, 2]$ ως πολωνυμική και για κάθε $x \in [0, 2]$ είναι

$$f'(x) = 3x^2 + 5 > 0$$

Τα πρόσημα της f' η μονοτονία και τα ακρότατα της φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$f'(x)$			+	
$f(x)$		0	18	

Άρα η f έχει

τοπικό ελάχιστο στο $x_1 = 0$ ίσο με $f(0) = 0$

τοπικό μέγιστο στο $x_2 = 2$ ίσο με $f(2) = 18$

25.5 7)

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[3, 7]$ ως πολωνυμική και για κάθε $x \in [3, 7]$ είναι

$$f'(x) = -6x^2 - 6 < 0$$

Τα πρόσημα της f' η μονοτονία και τα ακρότατα της φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	3	7	$+\infty$
$f'(x)$		-		
$f(x)$		-72	-630	

Άρα η f έχει

τοπικό μέγιστο στο $x_2 = 3$ ίσο με $f(3) = -72$

τοπικό ελάχιστο στο $x_1 = 7$ ίσο με $f(7) = -630$

25.5 8)

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[0, 2\pi]$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων και για κάθε $x \in (0, 2\pi)$ είναι $f'(x) = 1 - \sin x > 0$

Τα πρόσημα της f' η μονοτονία και τα ακρότατα της φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	0	2π	$+\infty$
$f'(x)$			+	
$f(x)$		0	2π	

Άρα η f έχει

τοπικό ελάχιστο στο $x_1 = 0$ ίσο με $f(0) = 0$

τοπικό μέγιστο στο $x_2 = 2\pi$ ίσο με $f(2\pi) = 2\pi$

25.5 9)

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[0, 2\pi]$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων και για κάθε $x \in [0, \pi]$ είναι $f'(x) = 1 + 2\eta\mu x > 0$

Τα πρόσημα της f' η μονοτονία και τα ακρότατα της φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	0	π	$+\infty$
$f'(x)$			+	
$f(x)$		-2	$\pi+2$	

Άρα η f έχει

τοπικό ελάχιστο στο $x_1 = 0$ ίσο με $f(0) = -2$

τοπικό μέγιστο στο $x_2 = \pi$ ίσο με $f(\pi) = \pi + 2$

25.5 10)

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων και για

κάθε $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ είναι $f'(x) = \sin x - \frac{1}{2}$

Είναι $f'(x) = 0 \Rightarrow \sin x - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}$

Τα πρόσημα της f' η μονοτονία και τα ακρότατα της φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$			+	0	-
$f(x)$		0	$\frac{3\sqrt{3}-\pi}{6}$	$\frac{4-\pi}{4}$	

Άρα η f έχει

τοπικό ελάχιστο στο $x_1 = 0$ ίσο με $f(0) = 0$

τοπικό μέγιστο στο $x_2 = \frac{\pi}{3}$ ίσο με $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}-\pi}{6}$

τοπικό ελάχιστο στο $x_3 = \frac{\pi}{2}$ ίσο με $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{4-\pi}{4}$