

25.49 1)

Η f έχει πεδίο ορισμού το $[0, +\infty)$ και είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με

$$f'(x) = \frac{\alpha}{2\sqrt{x}} x^2 + 2x(\alpha\sqrt{x} + \beta) \quad (1), \text{ για κάθε } x \in (0, +\infty)$$

Για να παρουσιάζει η f στο $x_0 = 1$ ακρότατο ίσο με 3, σύμφωνα με το θεώρημα

Fermat πρέπει $\boxed{f(1) = -3}$ και $\boxed{f'(1) = 0}$

$$\begin{cases} f(1) = -3 \\ f'(1) = 0 \end{cases} \stackrel{(1)}{\Rightarrow} \begin{cases} (\alpha\sqrt{1} + \beta)1^2 = -3 \\ \frac{\alpha}{2\sqrt{1}} 1^2 + 2 \cdot 1(\alpha\sqrt{1} + \beta) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = -3 \\ \frac{\alpha}{2} + 2\alpha + 2\beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = -3 \\ 5\alpha + 4\beta = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{matrix} \text{λύνουμε το σύστημα} \\ \Rightarrow \end{matrix} \begin{cases} \alpha = 12 \\ \beta = -15 \end{cases}$$

Επαλήθευση

Για $\alpha = 12$ και $\beta = -15$ είναι

$$f(x) = (12\sqrt{x} - 15)x^2 \Rightarrow f'(x) = \frac{12}{2\sqrt{x}} x^2 + 2x(12\sqrt{x} - 15) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x) = 6x\sqrt{x} + 2x(12\sqrt{x} - 15) \Rightarrow f'(x) = 2x(3\sqrt{x} + 12\sqrt{x} - 15) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x) = 2x(15\sqrt{x} - 15) \Rightarrow f'(x) = 30x(\sqrt{x} - 1)$$

Τα πρόσημα της f' η μονοτονία και τα ακρότατα της φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$			$\emptyset$	
			$-$	$+$
$f(x)$				
			$\swarrow$	$\searrow$
			$\boxed{-3}$	

Από τον πίνακα αυτό διαπιστώνουμε ότι πράγματι η f έχει ακρότατο στο $x_0 = 1$

25.49 2)

Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = 3ax^2 - 2\beta x + 9$ (1)

Για να παρουσιάζει η f ακρότατο στο $x_1 = 1$ και στο $x_2 = 3$, σύμφωνα με το θεώρημα Fermat πρέπει

$$\begin{cases} f'(1) = 0 \\ f'(3) = 0 \end{cases} \stackrel{(1)}{\Rightarrow} \begin{cases} 3a \cdot 1^2 - 2\beta \cdot 1 + 9 = 0 \\ 3a \cdot 3^2 - 2\beta \cdot 3 + 9 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a - 2\beta + 9 = 0 \\ 27a - 6\beta + 9 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3a - 2\beta = -9 \\ 27a - 6\beta = -9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a - 2\beta = -9 \\ 9a - 2\beta = -3 \end{cases} \stackrel{\text{λύνουμε το σύστημα}}{\Rightarrow} \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 6 \end{cases}$$

Επαλήθευση

Για $\alpha = 1$ και $\beta = 6$ είναι

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3)$$

Τα πρόσημα της f' η μονοτονία και τα ακρότατα της φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	0	+
$f(x)$				

Από τον πίνακα αυτό διαπιστώνουμε ότι πράγματι η f έχει ακρότατο στο $x_1 = 1$ και στο $x_2 = 3$

25.49 3)

Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = 3\alpha x^2 - 2\beta x + \gamma$

(1)

Για να παρουσιάζει η f ακρότατο στο $x_0 = 1$ τοπικό ακρότατο ίσο με 2 και τοπικό

ελάχιστο στο $x_0 = 0$, σύμφωνα με το θεώρημα Fermat πρέπει $f'(0) = 0$, $f'(1) = 0$

και $f(1) = 2$

$$\begin{cases} f'(0) = 0 \\ f'(1) = 0 \\ f(1) = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3\alpha \cdot 0^2 - 2\beta \cdot 0 + \gamma = 0 \\ 3\alpha \cdot 1^2 - 2\beta \cdot 1 + \gamma = 0 \\ \alpha \cdot 1^3 - \beta \cdot 1^2 + \gamma \cdot 1 - 1 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \gamma = 0 \\ 3\alpha - 2\beta + \gamma = 0 \\ \alpha - \beta + \gamma = 3 \end{cases} \xrightarrow{\text{λύνουμε το σύστημα}} \begin{cases} \alpha = -6 \\ \beta = -9 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

Επαλήθευση

Για $\alpha = -6$, $\beta = -9$ και $\gamma = 0$ είναι

$$f(x) = -6x^3 + 9x^2 - 1 \Rightarrow f'(x) = -18x^2 + 18x = -18x(x-1)$$

Τα πρόσημα της f' η μονοτονία και τα ακρότατα της φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	0	-
$f(x)$				

Από τον πίνακα αυτό διαπιστώνουμε ότι πράγματι η f παρουσιάζει στο $x_0 = 1$ τοπικό ακρότατο ίσο με 2 και τοπικό ελάχιστο στο $x_0 = 0$

25.49 4)

Η f έχει πεδίο ορισμού το $(0, +\infty) \cup (0, +\infty)$ και είναι παραγωγίσιμη στο

$$(0, +\infty) \cup (0, +\infty) \text{ με } f'(x) = 2x - \frac{2\alpha}{x^2} \quad (1)$$

μηδενίζεται στο η f στο $x_1 = 1$ πρέπει $f(1) = 0$, και για να παρουσιάζει στο $x_0 = 2$

τοπικό ακρότατο σύμφωνα με το θεώρημα Fermat πρέπει $f'(2) = 0$,

$$\begin{cases} f(1) = 0 \\ f'(2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1^2 + \frac{2\alpha}{1} + \beta = 0 \\ 2 \cdot 2 - \frac{2\alpha}{2^2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\alpha + \beta = -1 \\ 4 - \frac{\alpha}{2} = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{λύνουμε το σύστημα}} \begin{cases} \alpha = 8 \\ \beta = -17 \end{cases}$$

Επαλήθευση

Για $\alpha = 8$, $\beta = -17$ είναι

$$f(x) = x^2 + \frac{16}{x} - 17 \Rightarrow f'(x) = 2x - \frac{16}{x^2} = \frac{2x^3 - 16}{x^2} = \frac{2(x^3 - 8)}{x^2}$$

Τα πρόσημα της f' η μονοτονία και τα ακρότατα της φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		-		-	0	+	
f(x)							

Από τον πίνακα αυτό διαπιστώνουμε ότι πράγματι η f παρουσιάζει στο $x_0 = 2$ τοπικό ακρότατο