

Έστω x το μήκος της μεγάλης βάσης

Τότε, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα

Τα τρίγωνα ABE και $\Gamma\Delta Z$ είναι ίσα

$$\text{και άρα } AE = Z\Delta = \frac{x-\lambda}{2}$$

Οπότε στο τρίγωνο ABE με βάση το Πυθαγόρειο Θεώρημα το ύψος θα είναι

$$v = \sqrt{\lambda^2 - \left(\frac{x-\lambda}{2}\right)^2} = \sqrt{\lambda^2 - \frac{x^2 - 2\lambda x + \lambda^2}{4}} = \sqrt{\frac{4\lambda^2 - x^2 + 2\lambda x - \lambda^2}{4}} = \frac{\sqrt{-x^2 + 2\lambda x + 3\lambda^2}}{2}$$

Οπότε το εμβαδό E του τραπεζίου θα είναι

$$E = \frac{(B+\beta)v}{2} \Rightarrow E(x) = \frac{(x+\lambda) \sqrt{-x^2 + 2\lambda x + 3\lambda^2}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E(x) = \frac{(x+\lambda) \sqrt{-x^2 + 2\lambda x + 3\lambda^2}}{4}, \quad x > \lambda$$

Μένει τώρα να δούμε που παρουσιάζει ολικό μέγιστο η $E(x)$

Η E είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $(\lambda, +\infty)$ με

$$E'(x) = \frac{\sqrt{-x^2 + 2\lambda x + 3\lambda^2} + (x+\lambda) \frac{-2x+2\lambda}{2\sqrt{-x^2 + 2\lambda x + 3\lambda^2}}}{4} =$$

$$= \frac{\sqrt{-x^2 + 2\lambda x + 3\lambda^2} + (x+\lambda) \frac{\cancel{2}(\lambda-x)}{\cancel{2}\sqrt{-x^2 + 2\lambda x + 3\lambda^2}}}{4} =$$

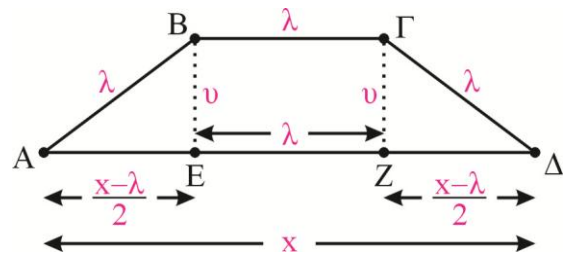
$$= \frac{\sqrt{-x^2 + 2\lambda x + 3\lambda^2}^2 + (x+\lambda)(\lambda-x)}{4\sqrt{-x^2 + 2\lambda x + 3\lambda^2}} = \frac{-x^2 + 2\lambda x + 3\lambda^2 + \lambda^2 - x^2}{4\sqrt{-x^2 + 2\lambda x + 3\lambda^2}} =$$

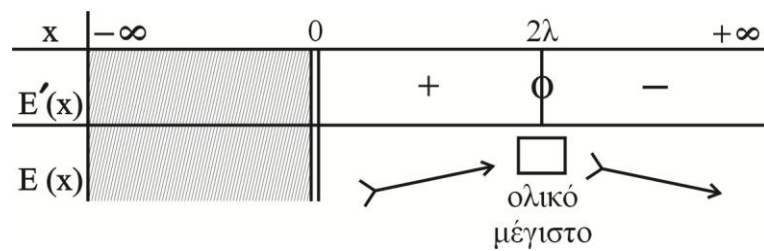
$$= \frac{-2x^2 + 2\lambda x + 4\lambda^2}{4\sqrt{-x^2 + 2\lambda x + 3\lambda^2}} = \frac{-(x^2 - \lambda x - 2\lambda^2)}{4\sqrt{-x^2 + 2\lambda x + 3\lambda^2}} =$$

$$= \frac{x^2 - \lambda x - 2\lambda^2: \Delta = \lambda^2 + 8\lambda = 9\lambda^2, \quad x_{1,2} = \frac{\lambda \pm \sqrt{9\lambda^2}}{2 \cdot 1} = \frac{\lambda \pm 3\lambda}{2} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = \frac{\lambda - 3\lambda}{2} = -\lambda \\ x_2 = \frac{\lambda + 3\lambda}{2} = 2\lambda \end{matrix} \quad \frac{-(x+\lambda)(x-2\lambda)}{2\sqrt{-x^2 + 2\lambda x + 3\lambda^2}}$$

Επειδή $x > 0$ η E' μηδενίζεται στο $x_0 = 2\lambda$

Τα πρόσημα της E' , η μονοτονία και τα ακρότατα της E φαίνονται στον παρακάτω πίνακα μονοτονίας





Από τον παραπάνω πίνακα προκύπτει ότι η E παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x_0 = 2\lambda$ (δεν ενδιαφέρει ποιο είναι αυτό)

Επομένως για να έχει το τραπέζιο το μέγιστο εμβαδό θα πρέπει η μεγάλη βάση να είναι $B = 2\lambda$