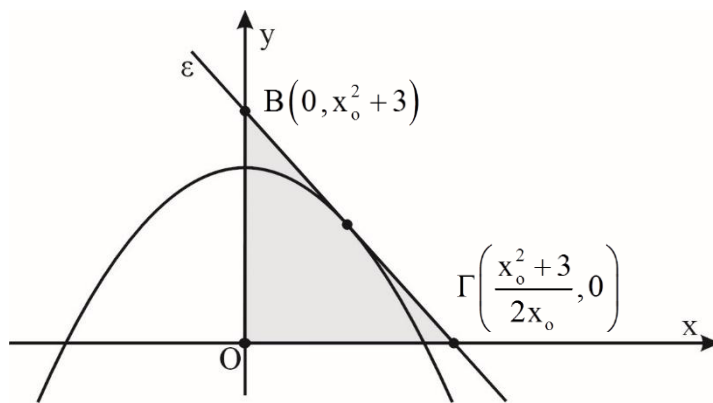


Έστω ε η εφαπτόμενη της
 συνάρτησης $f(x) = 3 - x^2$ στο
 τυχαίο σημείο της $A(x_0, f(x_0))$.
 Η ε θα έχει συντελεστή διεύθυνσης
 $\lambda = f'(x_0) = -2x_0$ και εξίσωση

$$\varepsilon: y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varepsilon: y - (3 - x_0^2) = -2x_0(x - x_0) \quad (1)$$



(προφανώς είναι $x_0 \neq 0$ διότι διαφορετικά δεν θα σχηματιζόταν τρίγωνο)

Η ε θα τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο B , με τετμημένη $x = 0$ και ακόμη
 $y - (3 - x_0^2) = -2x_0(0 - x_0) \Rightarrow y - 3 + x_0^2 = 2x_0^2 \Rightarrow y = x_0^2 + 3$
 δηλαδή τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $B(0, x_0^2 + 3)$

Η ε θα τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο Γ , με τεταγμένη $y = 0$ και ακόμη
 $0 - (3 - x_0^2) = -2x_0(x - x_0) \Rightarrow -3 + x_0^2 = -2x_0x + 2x_0^2 \Rightarrow 2x_0x = x_0^2 + 3 \Rightarrow$

$$\frac{x_0^2 \neq 0}{\Rightarrow x = \frac{x_0^2 + 3}{2x_0}}$$

δηλαδή τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $\Gamma\left(\frac{x_0^2 + 3}{2x_0}, 0\right)$

Επειδή μας ενδιαφέρει το εμβαδό που σχηματίζει με τους θετικούς ημιάξονες θα

$$\left. \begin{array}{l} x_0^2 + 3 > 0 \quad (\text{ισχύει πάντα}) \\ \frac{x_0^2 + 3}{2x_0} > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x_0 > 0$$

Το εμβαδόν του τριγώνου $OB\Gamma$ λοιπόν θα είναι

$$E = \frac{(OB) \cdot (O\Gamma)}{2} \Rightarrow E(x_0) = \frac{(x_0^2 + 3) \cdot \frac{x_0^2 + 3}{2x_0}}{2} \Rightarrow E(x_0) = \frac{(x_0^2 + 3)^2}{4x_0}, \quad x_0 > 0$$

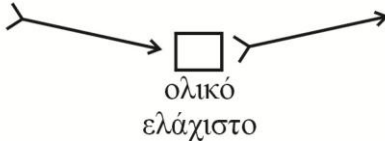
Μένει τώρα να δούμε που παρουσιάζει ολικό ελάχιστο η $E(x_0)$

Η E είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων στο $(0, +\infty)$ με

$$\begin{aligned} E'(x_0) &= \frac{2(x_0^2 + 3) \cdot 2x_0 \cdot 4x_0 - 4(x_0^2 + 3)^2}{16x_0^2} = \frac{16x_0^2(x_0^2 + 3) - 4(x_0^2 + 3)^2}{16x_0^2} = \\ &= \frac{4(x_0^2 + 3)[4x_0^2 - (x_0^2 + 3)]}{16x_0^2} = \frac{(x_0^2 + 3)(3x_0^2 - 3)}{4x_0^2} = \frac{3(x_0^2 + 3)(x_0^2 - 1)}{4x_0^2} = \\ &= \frac{3(x_0^2 + 3)(x_0 - 1)(x_0 + 1)}{4x_0^2} = \end{aligned}$$

Επειδή $x_0 > 0$ η E' μηδενίζεται στο $x_0 = 1$

Τα πρόσημα της E' , η μονοτονία και τα ακρότατα της E φαίνονται στον παρακάτω πίνακα μονοτονίας

x_0	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
$E'(x_0)$			-	0	+
$E(x_0)$					

Από τον παραπάνω πίνακα προκύπτει ότι η E παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0 = 1$ (δεν ενδιαφέρει ποιο είναι αυτό)

Επομένως η εφαπτομένη της συνάρτησης $y = 3 - x^2$ που σχηματίζει με τους ημιάξονες Ox και Oy τρίγωνο με ελάχιστο εμβαδό εφάπτεται στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 1$ και άρα θα έχει εξίσωση

$$(1) \Rightarrow y - (3-1) = -2 \cdot 1(x-1) \Rightarrow y-2 = -2x+2 \Rightarrow \boxed{2x+y-4=0}$$