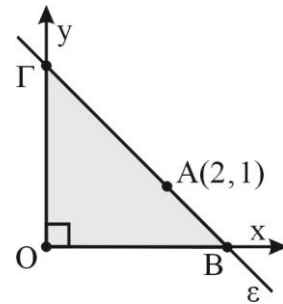


Έστω ότι η ευθεία ε που διέρχεται από το σημείο A έχει συντελεστή διεύθυνσης λ (προφανώς η ευθεία ε έχει συντελεστή διεύθυνσης και μάλιστα $\lambda \neq 0$ διότι διαφορετικά δεν θα σχηματιζόταν τρίγωνο)



Η ευθεία ε λοιπόν θα έχει εξίσωση $\varepsilon: y-1=\lambda(x-2)$

Η ε θα τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο B , με τεταγμένη $y=0$ και ακόμη

$$0-1=\lambda(x-2) \Rightarrow -1=\lambda x-2\lambda \Rightarrow \lambda x=2\lambda-1 \Rightarrow x=\frac{2\lambda-1}{\lambda} \quad (\lambda \neq 0)$$

δηλαδή τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $B\left(\frac{2\lambda-1}{\lambda}, 0\right)$

Η ε θα τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο Γ , με τεταγμένη $x=0$ και ακόμη

$$y-1=\lambda(0-2) \Rightarrow y-1=-2\lambda \Rightarrow y=-2\lambda+1$$

δηλαδή τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $\Gamma(0, -2\lambda+1)$

Επειδή μας ενδιαφέρει το εμβαδό που σχηματίζει με τους θετικούς ημιάξονες θα

$$\text{πρέπει } \left. \begin{array}{l} -2\lambda+1 > 0 \\ \frac{2\lambda-1}{\lambda} > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2\lambda-1 < 0 \\ \lambda < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \lambda < \frac{1}{2} \\ \lambda < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lambda < 0$$

Το εμβαδόν του τριγώνου λοιπόν θα είναι

$$E = \frac{(OB) \cdot (O\Gamma)}{2} \Rightarrow E(\lambda) = \frac{|2\lambda-1| \left| \frac{2\lambda-1}{\lambda} \right|}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E(\lambda) = \left| \frac{(2\lambda-1)^2}{2\lambda} \right| \xrightarrow{\lambda < 0} E(\lambda) = -\frac{(2\lambda-1)^2}{2\lambda}, \lambda < 0$$

Μένει τώρα να δούμε που παρουσιάζει ολικό ελάχιστο η $E(\lambda)$

Η E είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων στο $(-\infty, 0)$ με

$$\begin{aligned} E'(\lambda) &= -\frac{2(2\lambda-1) \cdot 2 \cdot 2\lambda - 2(2\lambda-1)^2}{4\lambda^2} = -\frac{8\lambda(2\lambda-1) - 2(2\lambda-1)^2}{4\lambda^2} = \\ &= \frac{-2(2\lambda-1)[4\lambda - (2\lambda-1)]}{4\lambda^2} = \frac{-2(2\lambda-1)(4\lambda - 2\lambda + 1)}{4\lambda^2} = \frac{-2(2\lambda-1)(2\lambda+1)}{4\lambda^2} \end{aligned}$$

Επειδή $\lambda < 0$ η E' μηδενίζεται στο $x_0 = -\frac{1}{2}$

Τα πρόσημα της E' , η μονοτονία και τα ακρότατα της E φαίνονται στον παρακάτω πίνακα μονοτονίας

λ	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	0	$+\infty$
$E'(\lambda)$	$-$	Φ	$+$	
$E(\lambda)$				

ολικό
ελάχιστο

Από τον παραπάνω πίνακα προκύπτει ότι η E παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $\lambda = -\frac{1}{2}$
(δεν ενδιαφέρει ποιο είναι αυτό)

Επομένως η ευθεία που διέρχεται από το σημείο $A(2,1)$ και σχηματίζει με τους θετικούς ημιάξονες τρίγωνο με το ελάχιστο εμβαδό έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = -\frac{1}{2}$, άρα έχει εξίσωση $y - 1 = -\frac{1}{2}(x - 2) \Rightarrow y - 1 = -\frac{1}{2}x + 1 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + 2$