

25.4 1)

Η f έχει πεδίο ορισμού το $(0, +\infty)$. Είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ ως διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με

$$f'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$$

$$\text{Είναι } f'(x) = 0 \Rightarrow x = 1$$

Τα πρόσημα της f' η μονοτονία και τα ακρότατα της φαίνονται στον διπλανό πίνακα

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
$f'(x)$			+	0	-
$f(x)$				-1	

$\tau\mu$

Άρα η f έχει

τοπικό μέγιστο στο $x_1 = 1$ ίσο με $f(1) = -1$

25.4 2)

Η f έχει πεδίο ορισμού το $(0, +\infty)$. Είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ ως διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με

$$f'(x) = 2x - \frac{2}{x} = \frac{2x^2 - 2}{x} = \frac{2(x^2 - 1)}{x} = \frac{2(x-1)(x+1)}{x}$$

$$\text{Είναι } f'(x) = 0 \Rightarrow x = 1$$

Τα πρόσημα της f' η μονοτονία και τα ακρότατα της φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
$f'(x)$			-	0	+
$f(x)$					

Άρα η f έχει

τοπικό ελάχιστο στο $x_1 = 1$ ίσο με $f(1) = 1$

25.4 3)

Η f έχει πεδίο ορισμού το $(0, +\infty)$. Είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με

$$f'(x) = 2x - 2 - \frac{4}{x} = \frac{2x^2 - 2x - 4}{x} = \frac{2(x^2 - x - 2)}{x}$$

$$\Delta = 1 + 8 = 9, \quad x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm 3}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1+3}{2} = 2 \\ x_2 = \frac{1-3}{2} = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{2(x+1)(x-2)}{x}$$

$$\text{Είναι } f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

Τα πρόσημα της f' η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον διπλανό πίνακα

Άρα η f έχει

τοπικό ελάχιστο στο $x_1 = 2$ ίσο με $f(2) = -4 \ln 2$

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$f'(x)$			- 0 +	
$f(x)$				

$-4\ln 2$

$\tau \varepsilon$

25.4 4)

Είναι $x > 0$ και $\ln x \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$. Άρα η f έχει πεδίο ορισμού το $A = (0,1) \cup (1, +\infty)$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,1) \cup (1, +\infty)$ ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f'(x) = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$$

$$\text{Είναι } f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x} = 0 \Rightarrow \ln x - 1 = 0 \Rightarrow \ln x = 1 \Rightarrow x = e$$

Τα πρόσημα της f' η μονοτονία και τα ακρότατα της φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	0	1	e	$+\infty$
$f'(x)$			-	-	+
$f(x)$				e	

Άρα η f έχει

τοπικό ελάχιστο στο $x_1 = e$ ίσο με $f(e) = e$

25.4 5)

Είναι $x > 0$ και $\ln^2 x \neq 0 \Rightarrow \ln x \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$. Άρα η f έχει πεδίο ορισμού το $A = (0,1) \cup (1, +\infty)$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,1) \cup (1, +\infty)$ ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f'(x) = \frac{\ln^2 x - \cancel{x} \cdot 2 \cdot \ln x \cdot \frac{1}{\cancel{x}}}{\ln^4 x} = \frac{\ln^2 x - 2 \ln x}{\ln^4 x} = \frac{\ln x (\ln x - 2)}{\ln^4 x}$$

$$\text{Είναι } f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{\ln x (\ln x - 2)}{\ln^4 x} = 0 \Rightarrow \ln x (\ln x - 2) = 0 \stackrel{\ln x \neq 0}{\Rightarrow} \ln x = 2 \Rightarrow x = e^2$$

Τα πρόσημα της f' η μονοτονία και τα ακρότατα της φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	0	1	e^2	$+\infty$
$f'(x)$			+	-	+
$f(x)$				$\frac{e^2}{4}$	

Άρα η f έχει

τοπικό ελάχιστο στο $x_1 = e^2$ ίσο με $f(e^2) = \frac{e^2}{4}$

25.4 6)

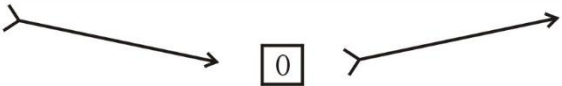
Είναι $x^2 - 6x + 10 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ διότι $\Delta = 36 - 40 < 0$. Άρα η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f'(x) = \frac{2x - 6}{x^2 - 6x + 10}$$

$$\text{Είναι } f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{2x - 6}{x^2 - 6x + 10} = 0 \Rightarrow 2x - 6 = 0 \Rightarrow x = 3$$

Τα πρόσημα της f' ή μονοτονία και τα ακρότατα της φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f'(x)$	—	0	+
$f(x)$			

Άρα η f έχει

τοπικό ελάχιστο στο $x_1 = 3$ ίσο με $f(3) = 0$