

Είναι $\alpha + \beta = \kappa \Rightarrow \beta = \kappa - \alpha$

Οπότε το άθροισμα των τετραγώνων τους θα είναι

$$f(\alpha) = \alpha^2 + \beta^2 \stackrel{\beta = \kappa - \alpha}{\Rightarrow} f(\alpha) = \alpha^2 + (\kappa - \alpha)^2, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Μένει τώρα να δείξουμε ότι $f(\alpha) \geq \frac{1}{2}\kappa^2$, για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$

Η f ως πολυωνυμική είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$f'(\alpha) = 2\alpha - 2(\kappa - \alpha) = 2(\alpha - \kappa + \alpha) = 2(2\alpha - \kappa), \quad \text{για κάθε } \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\text{Έτσι η } f' \text{ μηδενίζεται στο } \alpha_0 = \frac{\kappa}{2} \text{ με } f\left(\frac{\kappa}{2}\right) = \left(\frac{\kappa}{2}\right)^2 + \left(\kappa - \frac{\kappa}{2}\right)^2 = 2\left(\frac{\kappa}{2}\right)^2 = \frac{\kappa^2}{2}$$

Τα πρόσημα της f' , η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα μονοτονίας

α	$-\infty$	0	$\frac{\kappa}{2}$	$+\infty$
$f'(\alpha)$			$\emptyset$	
			$-$	$+$
$f(\alpha)$				
			$\frac{\kappa^2}{2}$	

Από τον παραπάνω πίνακα προκύπτει ότι η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $\alpha_0 = \frac{\kappa}{2}$

ίσο με $\frac{\kappa^2}{2}$

Επομένως για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ είναι

$$f(\alpha) \geq \frac{\kappa^2}{2} \Rightarrow \alpha^2 + (\kappa - \alpha)^2 \geq \frac{\kappa^2}{2} \stackrel{\kappa - \alpha = \beta}{\Rightarrow} \alpha^2 + \beta^2 \geq \frac{\kappa^2}{2}$$