

Έστω x ο ένας αριθμός και y ο άλλος. Τότε $x \cdot y = 8 \Rightarrow y = \frac{8}{x}$

Οπότε το άθροισμα του τετραγώνου του ενός με το διπλάσιο του άλλου θα είναι

$$f(x) = x^2 + 2y \xRightarrow{y=\frac{8}{x}} f(x) = x^2 + 2 \cdot \frac{8}{x} \Rightarrow f(x) = \frac{x^3 + 16}{x}, x > 0$$

Μένει τώρα να δείξουμε ότι $f(x) \geq 12$ για κάθε $x > 0$

Η f ως ρητή είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με

$$f'(x) = \frac{3x^2 \cdot x - (x^3 + 16)}{x^2} = \frac{3x^3 - x^3 - 16}{x^2} = \frac{2x^3 - 16}{x^2} = \frac{2(x^3 - 8)}{x^2} \quad x > 0$$

Έτσι η f' μηδενίζεται στο $x_0 = 2$ με $f(2) = \frac{2^3 + 16}{2} \Rightarrow f(2) = 12$

Τα πρόσημα της f' , η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα μονοτονίας

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$f'(x)$			$-$	$+$
$f(x)$			$\searrow$	$\nearrow$

12

Από τον παραπάνω πίνακα προκύπτει ότι η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0 = 2$ ίσο με 12

Επομένως $f(x) \geq 12$ και άρα το άθροισμα του τετραγώνου του ενός με το διπλάσιο του άλλου είναι μεγαλύτερο ή ίσο του 12