

## 25.23 1)

Έστω  $B(x, x^2 + 1)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , σημείο της παραβολής  $y = x^2 + 1$ . Τότε η απόσταση AB

$$\text{θα είναι } f(x) = \sqrt{(x-3)^2 + (x^2 + 1 - 1)^2} = \sqrt{(x-3)^2 + x^4}, x \in \mathbb{R}$$

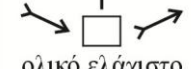
$$\text{Η } f \text{ είναι παραγωγίσιμη στο } \mathbb{R} \text{ με } f'(x) = \frac{2(x-3) + 4x^3}{2\sqrt{(x-3)^2 + x^4}} = \frac{2(x-3+2x^3)}{2\sqrt{(x-3)^2 + x^4}}$$

$$= \frac{2x^3 + x - 3}{\sqrt{(x-3)^2 + x^4}} \stackrel{\text{παραγοντοποίηση με Horner προφανής ρίζα το 1}}{=} = \frac{(x-1)(2x^2 + 2x + 3)}{\sqrt{(x-3)^2 + x^4}}, x \in \mathbb{R}$$

Το τριώνυμο  $2x^2 + 2x - 3$  έχει  $\Delta < 0$ . Έτσι η  $f'(x)$  μηδενίζεται μόνο στο  $x_0 = 1$

Από τον διπλανό πίνακα προκύπτει ότι η  $f$  παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο  $x_0 = 1$  (δεν ενδιαφέρει ποιο είναι αυτό).

Επομένως το σημείο B της  $C_f$ , που απέχει την ελάχιστη απόσταση από το A είναι το  $(1, f(1)) = (1, 2)$

|         |                                                                                     |   |           |
|---------|-------------------------------------------------------------------------------------|---|-----------|
| x       | $-\infty$                                                                           | 1 | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | -                                                                                   | 0 | +         |
| f(x)    |  |   |           |
|         | ολικό ελάχιστο                                                                      |   |           |

## 25.23 2)

Έστω  $B(x, x^2)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , σημείο της συνάρτησης  $f$ . Τότε η απόσταση των σημείων AB θα είναι

$$g(x) = \sqrt{(x-6)^2 + (x^2 - 3)^2}, x \in \mathbb{R}$$

Μένει τώρα να δούμε που παρουσιάζει ολικό ελάχιστο η  $g$

Η  $g$  είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγισίμων στο  $\mathbb{R}$  με

$$g'(x) = \frac{2(x-6) + 2(x^2-3)2x}{2\sqrt{(x-6)^2 + (x^2-3)^2}} = \frac{2(x-6+2x^3-6x)}{2\sqrt{(x-6)^2 + (x^2-3)^2}} =$$

$$= \frac{2x^3 - 5x - 6}{\sqrt{(x-6)^2 + (x^2-3)^2}} \stackrel{\text{παραγοντοποίηση με σχήμα Horner προφανής ρίζα το 2}}{=} = \frac{(x-2)(2x^2 + 4x + 3)}{\sqrt{(x-6)^2 + (x^2-3)^2}}, x \in \mathbb{R}$$

Το τριώνυμο  $2x^2 + 4x + 3$  έχει  $\Delta < 0$ . Έτσι η  $g'$  μηδενίζεται στο  $x = 2$  με

$$g(2) = \sqrt{(2-6)^2 + (2^2 - 3)^2} = \sqrt{17}$$

Τα πρόσημα της  $g'$ , η μονοτονία και τα ακρότατα της  $g$  φαίνονται στον παρακάτω πίνακα μονοτονίας

|         |                                                                                     |   |           |
|---------|-------------------------------------------------------------------------------------|---|-----------|
| x       | $-\infty$                                                                           | 2 | $+\infty$ |
| $g'(x)$ | -                                                                                   | 0 | +         |
| g(x)    |  |   |           |
|         | ολικό ελάχιστο                                                                      |   |           |

Από τον παραπάνω πίνακα προκύπτει ότι η  $g$  παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο  $x_0 = 1$

Επομένως το σημείο της συνάρτησης  $f$  με  $f(x) = x^2$  που απέχει την ελάχιστη απόσταση από το σημείο  $A(6,3)$  είναι το  $(2, f(2)) = \boxed{(2,4)}$