

25.21 1)

Έστω x και y οι δύο διαστάσεις (μήκος και πλάτος) του ορθογωνίου, $x, y > 0$.

Έχουμε $E = 400 \Rightarrow x \cdot y = 400 \Rightarrow y = \frac{400}{x}$

Οπότε η περίμετρος του ορθογωνίου θα είναι $\Pi(x) = 2x + \frac{800}{x}$, $x > 0$

Η Π είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με

$$\Pi'(x) = \frac{4x^2 - (2x^2 + 800)}{x^2} = \frac{2x^2 - 800}{x^2} = \frac{2(x^2 - 400)}{x^2} = \frac{2(x+20)(x-20)}{x^2}$$

Έτσι η Π' μηδενίζεται στο $x_0 = 20$

Από τον διπλανό πίνακα προκύπτει ότι η Π παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x = 20$ (δεν ενδιαφέρει ποιο είναι αυτό).

Επομένως την ελάχιστη περίμετρο την έχει το ορθογώνιο με

διαστάσεις $x = 20$ και $y = \frac{400}{20} = 20$ (τετράγωνο)

x	0	20	$+\infty$
$\Pi'(x)$		- 0 +	
$\Pi(x)$			

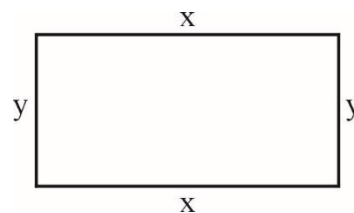
ολικό ελάχιστο

25.21 2)

Έστω x και y οι δύο διαστάσεις (μήκος και πλάτος) του ορθογωνίου, $x, y > 0$

Επειδή το ορθογώνιο έχει εμβαδό $E = 100$ θα είναι

$E = 100 \Rightarrow x \cdot y = 100 \Rightarrow y = \frac{100}{x}$



Οπότε η περίμετρος του ορθογωνίου θα είναι

$$\Pi(x) = 2x + 2 \frac{100}{x} = \frac{2x^2 + 200}{x}, \quad x > 0$$

Μένει τώρα να δούμε που παρουσιάζει ολικό μέγιστο η $\Pi(x)$

Η Π είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με

$$\Pi'(x) = \frac{4x^2 - (2x^2 + 200)}{x^2} = \frac{4x^2 - 2x^2 - 200}{x^2} = \frac{2x^2 - 200}{x^2} = \frac{2(x^2 - 100)}{x^2} = \frac{2(x+10)(x-10)}{x^2}$$

Έτσι η Π' μηδενίζεται στο $x_0 = 10$

Τα πρόσημα της Π' , η μονοτονία και τα ακρότατα της Π φαίνονται στον παρακάτω πίνακα μονοτονίας

x	$-\infty$	0	10	$+\infty$
$\Pi'(x)$			- 0 +	
$\Pi(x)$				

ολικό ελάχιστο

Από τον παραπάνω πίνακα προκύπτει ότι η Π παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0 = 10$ (δεν ενδιαφέρει ποιο είναι αυτό)

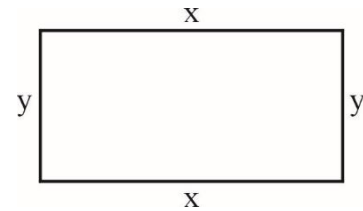
Επομένως την ελάχιστη περίμετρο την έχει το ορθογώνιο με διαστάσεις $\boxed{x=10}$ και $y = \frac{100}{10} \Rightarrow \boxed{y=10}$ (τετράγωνο)

25.21 3)

Έστω x και y οι δύο διαστάσεις (μήκος και πλάτος) του ορθογωνίου, $x, y > 0$

Επειδή το ορθογώνιο έχει εμβαδό $E = 64$ θα είναι

$$E = 64 \Rightarrow x \cdot y = 64 \Rightarrow y = \frac{64}{x}$$



Οπότε η περίμετρος του ορθογωνίου θα είναι

$$\Pi(x) = 2x + 2 \frac{64}{x} = \frac{2x^2 + 128}{x}, \quad x > 0$$

Μένει τώρα να δούμε που παρουσιάζει ολικό μέγιστο η $\Pi(x)$

Η Π είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με

$$\Pi'(x) = \frac{4x^2 - (2x^2 + 128)}{x^2} = \frac{4x^2 - 2x^2 - 128}{x^2} = \frac{2x^2 - 128}{x^2} = \frac{2(x^2 - 64)}{x^2} = \frac{2(x+8)(x-8)}{x^2}$$

Έτσι η Π' μηδενίζεται στο $x_0 = 8$

Τα πρόσημα της Π' , η μονοτονία και τα ακρότατα της Π φαίνονται στον παρακάτω πίνακα μονοτονίας

x	$-\infty$	0	8	$+\infty$
$\Pi'(x)$			$-$	$+$
$\Pi(x)$				

Από τον παραπάνω πίνακα προκύπτει ότι η Π παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0 = 8$ (δεν ενδιαφέρει ποιο είναι αυτό)

Επομένως την ελάχιστη περίμετρο την έχει το ορθογώνιο με διαστάσεις $\boxed{x=8}$ και $y = \frac{64}{8} \Rightarrow \boxed{y=8}$ (τετράγωνο)