

Γ ΛΥΚΕΙΟΥ ΜΕΡΟΣ Β

25.20 1)

Έστω x και y οι δύο διαστάσεις (μήκος και πλάτος) του ορθογώνιου, $x, y > 0$

Επειδή το ορθογώνιο έχει περίμετρο $\Pi = 20$ θα είναι

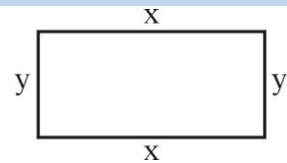
$$\Pi = 20 \Rightarrow 2x + 2y = 20 \Rightarrow x + y = 10 \Rightarrow y = 10 - x$$

Το εμβαδόν του ορθογώνιου θα είναι $E(x) = x \cdot (10 - x) = -x^2 + 10x$, $0 < x < 10$

Η E ως πολυωνυμική είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 10)$, με $E'(x) = -2x + 10$

Οπότε η $E'(x)$ μηδενίζεται στο $x_0 = 5$

Από τον διπλανό πίνακα προκύπτει ότι η E παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x_0 = 5$ (δεν ενδιαφέρει ποιο είναι αυτό). Επομένως το μέγιστο εμβαδό το έχει το ορθογώνιο με διαστάσεις $x = 5$ και $y = 10 - 5 \Rightarrow y = 5$ (τετράγωνο)



x	0	5	10
$E'(x)$		+	-
$E(x)$		ολικό μέγιστο	

25.20 2)

Έστω x και y οι δύο διαστάσεις (μήκος και πλάτος) του ορθογώνιου, $x, y > 0$

Επειδή το ορθογώνιο έχει περίμετρο $\Pi = 60$ θα είναι

$$\Pi = 60 \Rightarrow 2x + 2y = 60 \Rightarrow x + y = 30 \Rightarrow y = 30 - x$$

Οπότε το εμβαδόν του ορθογώνιου θα είναι

$$E(x) = x \cdot (30 - x) = -x^2 + 30x, \quad 0 < x < 30$$

Μένει τώρα να δούμε που παρουσιάζει ολικό μέγιστο η $E(x)$

Η E ως πολυωνυμική είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 30)$ με $E'(x) = -2x + 30$

Έτσι η E' μηδενίζεται στο $x_0 = 15$

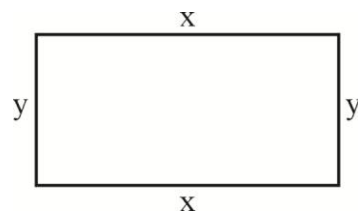
Τα πρόσημα της E' , η μονοτονία και τα ακρότατα της E φαίνονται στον παρακάτω πίνακα μονοτονίας

x	$-\infty$	0	15	30	$+\infty$
$E'(x)$		+	0	-	
$E(x)$			ολικό μέγιστο		

Από τον παραπάνω πίνακα προκύπτει ότι η E παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x_0 = 15$

(δεν ενδιαφέρει ποιο είναι αυτό)

Επομένως το μέγιστο εμβαδό το έχει το ορθογώνιο με διαστάσεις $x = 15$ και $y = 30 - 15 \Rightarrow y = 15$ (τετράγωνο)

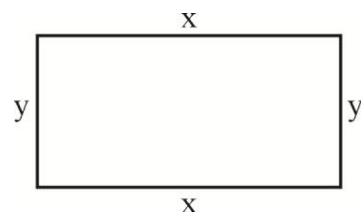


25.20 3)

Έστω x και y οι δύο διαστάσεις (μήκος και πλάτος) του ορθογώνιου, $x, y > 0$

Επειδή το ορθογώνιο έχει περίμετρο $\Pi = 320$ θα είναι

$$\Pi = 320 \Rightarrow 2x + 2y = 320 \Rightarrow x + y = 160 \Rightarrow y = 160 - x$$



Οπότε το εμβαδόν του ορθογωνίου θα είναι

$$E(x) = x \cdot (160 - x) = -x^2 + 160x, \quad 0 < x < 160$$

Μένει τώρα να δούμε που παρουσιάζει ολικό μέγιστο η $E(x)$

Η E ως πολωνυμική είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 160)$ με $E'(x) = -2x + 160$

Έτσι η E' μηδενίζεται στο $x_0 = 80$

Τα πρόσημα της E' , η μονοτονία και τα ακρότατα της E φαίνονται στον παρακάτω πίνακα μονοτονίας

x	$-\infty$	0	80	160	$+\infty$
$E'(x)$			+	0	-
$E(x)$					

Από τον παραπάνω πίνακα προκύπτει ότι η E παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x_0 = 80$ (δεν ενδιαφέρει ποιο είναι αυτό)

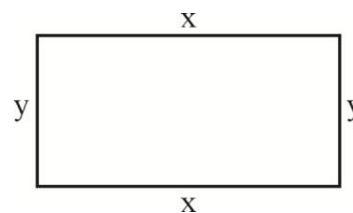
Επομένως το μέγιστο εμβαδό το έχει το ορθογώνιο με διαστάσεις $\boxed{x = 80}$ και $y = 160 - 80 \Rightarrow \boxed{y = 80}$ (τετράγωνο)

25.20 4)

Έστω x και y οι δύο διαστάσεις (μήκος και πλάτος) του ορθογωνίου, $x, y > 0$

Επειδή το ορθογώνιο έχει περίμετρο $\Pi = \kappa$ θα είναι

$$\Pi = \kappa \Rightarrow 2x + 2y = \kappa \Rightarrow x + y = \frac{\kappa}{2} \Rightarrow y = \frac{\kappa}{2} - x$$



Οπότε το εμβαδόν του ορθογωνίου θα είναι

$$E(x) = x \cdot \left(\frac{\kappa}{2} - x \right) = -x^2 + \frac{\kappa}{2}x, \quad 0 < x < \frac{\kappa}{2}$$

Μένει τώρα να δούμε που παρουσιάζει ολικό μέγιστο η $E(x)$

Η E ως πολωνυμική είναι παραγωγίσιμη στο $\left(0, \frac{\kappa}{2}\right)$ με $E'(x) = -2x + \frac{\kappa}{2}$

Έτσι η E' μηδενίζεται στο $x_0 = \frac{\kappa}{4}$

Τα πρόσημα της E' , η μονοτονία και τα ακρότατα της E φαίνονται στον παρακάτω πίνακα μονοτονίας

x	$-\infty$	0	$\frac{\kappa}{4}$	$\frac{\kappa}{2}$	$+\infty$
$E'(x)$			+	0	-
$E(x)$					

Από τον παραπάνω πίνακα προκύπτει ότι η Ε παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x_0 = \frac{\kappa}{4}$
(δεν ενδιαφέρει ποιο είναι αυτό)

Επομένως το μέγιστο εμβαδό το έχει το ορθογώνιο με διαστάσεις $\boxed{x = \frac{\kappa}{4}}$ και

$$y = \frac{\kappa}{2} - \frac{\kappa}{4} \Rightarrow \boxed{y = \frac{\kappa}{4}} \text{ (τετράγωνο)}$$