

Γ ΛΥΚΕΙΟΥ ΜΕΡΟΣ Β

25.2 1)

- α) Η f έχει πεδίο ορισμού το $(-\infty, -2) \cup (-2, +\infty)$. Είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$ ως ρητή, με

$$f'(x) = \frac{2x(x+2) - x^2}{(x+2)^2} = \frac{2x^2 + 4x - x^2}{(x+2)^2} = \frac{x^2 + 4x}{(x+2)^2} = \frac{x(x+4)}{(x+2)^2}$$

Είναι $f'(x) = 0 \Rightarrow x = -4$ ή $x = 0$

Τα πρόσημα της f' η μονοτονία και τα ακρότατα της φαίνονται στον διπλανό πίνακα

x	$-\infty$	-4	-2	0	$+\infty$	
f'(x)	+	0	-	-	0	+
f(x)						

Άρα η f έχει

τοπικό μέγιστο στο $x_1 = -4$ ίσο με $f(-4) = -8$

τοπικό ελάχιστο στο $x_2 = 0$ ίσο με $f(0) = 0$

- β) Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως ρητή, με

$$f'(x) = \frac{2(x^2 + 2) - 2x(2x - 1)}{(x^2 + 2)^2} = \frac{2x^2 + 4 - 4x^2 + 2x}{(x^2 + 2)^2} = \frac{-2(x^2 - x - 2)}{(x^2 + 2)^2}$$

Είναι $f'(x) = 0 \Rightarrow x = -1$ ή $x = 2$

Τα πρόσημα της f' η μονοτονία και τα ακρότατα της φαίνονται στον διπλανό πίνακα

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$	
$f'(x)$	-	0	+	0	-
f(x)					

Άρα η f έχει

τοπικό ελάχιστο στο $x_1 = -1$ ίσο με $f(-1) = -1$

τοπικό μέγιστο στο $x_2 = 2$ ίσο με $f(2) = \frac{1}{2}$

25.2 2)

- Η f έχει πεδίο ορισμού το $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$. Είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ ως ρητή, με

$$f'(x) = \frac{3(x-1) - (3x+2)}{(x-1)^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{\cancel{3x} - 3 - \cancel{3x} - 2}{(x-1)^2} = \frac{-5}{(x-1)^2}$$

Είναι $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ και αφού δεν υπάρχουν ούτε άκρα κλειστού διαστήματος του πεδίου ορισμού η f δεν έχει ακρότατα

25.2 3)

- Η f έχει πεδίο ορισμού το $(-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$. Είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με

$$f'(x) = \frac{2x(x+1) - x^2}{(x+1)^2} = \frac{2x^2 + 2x - x^2}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2} = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$$

Είναι $f'(x) = 0 \Rightarrow x = -2$ ή $x = 0$

Τα πρόσημα της f' η μονοτονία και τα ακρότατα της φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	-2	-1	0	$+\infty$	
f'(x)	+	0	-	-	0	+
f(x)		$\swarrow$ $\boxed{-4}$ $\searrow$		$\swarrow$ $\boxed{0}$ $\searrow$		

Άρα η f έχει

τοπικό μέγιστο στο $x_1 = -2$ ίσο με $f(-2) = -4$

τοπικό ελάχιστο στο $x_2 = 0$ ίσο με $f(0) = 0$

25.2 4)

Η f έχει πεδίο ορισμού το $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$. Είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με

$$f'(x) = \frac{2x(x-2) - x^2 - 5}{(x-2)^2} = \frac{2x^2 - 4x - x^2 - 5}{(x-2)^2} = \frac{x^2 - 4x - 5}{(x-2)^2}$$

$$\Delta = 16 + 20 = 36, \quad x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{36}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm 6}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{4+6}{2} = 5 \\ x_2 = \frac{4-6}{2} = -1 \end{cases}$$

$$\text{Είναι } f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 4x - 5 = 0 \Rightarrow x = -1 \text{ ή } x = 5$$

Τα πρόσημα της f' η μονοτονία και τα ακρότατα της φαίνονται στον διπλανό πίνακα

Άρα η f έχει

τοπικό μέγιστο στο $x_1 = -1$ ίσο με $f(-1) = -2$

τοπικό ελάχιστο στο $x_2 = 5$ ίσο με $f(5) = 10$

x	$-\infty$	-1	2	5	$+\infty$	
f'(x)	+	0	-	-	0	+
f(x)		$\nwarrow$ $\boxed{-2}$ $\nearrow$ $\tau\mu$		$\nwarrow$ $\boxed{10}$ $\nearrow$ $\tau\varepsilon$		

25.2 5)

$$\Delta = 4 + 12 = 16, \quad x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm 4}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{2+4}{2} = 3 \\ x_2 = \frac{2-4}{2} = -1 \end{cases}$$

$$\text{Είναι } x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = -1 \text{ ή } x = 3$$

Επομένως η f έχει πεδίο ορισμού το $(-\infty, -1) \cup (-1, 3) \cup (3, +\infty)$. Είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty, -1) \cup (-1, 3) \cup (3, +\infty)$, ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με

$$f'(x) = -\frac{2x-2}{(x^2-2x-3)^2} = -\frac{2(x-1)}{(x^2-2x-3)^2}$$

$$\text{Είναι } f'(x) = 0 \Rightarrow -\frac{2(x-1)}{x^2-2x-3} = 0 \Rightarrow 2(x-1) = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ ή } x = 5$$

Τα πρόσημα της f' η μονοτονία και τα ακρότατα της φαίνονται στον διπλανό πίνακα

Άρα η f έχει

τοπικό ελάχιστο στο $x_1 = 1$ ίσο με $f(1) = -\frac{1}{4}$

x	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$
f'(x)	+	+	0	-	-
f(x)			$\swarrow$ $\boxed{-\frac{1}{4}}$ $\searrow$ τμ		

25.2 6)

$$\Delta=1+8=9, \quad x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{9}}{2}=\frac{-1\pm3}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1=\frac{-1+3}{2}=1 \\ x_2=\frac{-1-3}{2}=-2 \end{cases}$$

$$\text{Είναι } x^2 + x - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -2 \quad \text{ή} \quad x = 1$$

Επομένως η f έχει πεδίο ορισμού το $(-\infty, -2) \cup (-2, 1) \cup (1, +\infty)$. Είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty, -2) \cup (-2, 1) \cup (1, +\infty)$, ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με

$$f'(x) = \frac{x^2 + x - 2 - (x-2)(2x+1)}{(x^2 + x - 2)^2} = \frac{x^2 + \cancel{x} - \cancel{2} - 2x^2 - \cancel{x} + 4x + \cancel{2}}{(x^2 + x - 2)^2} =$$

$$= \frac{-x^2 + 4x}{(x^2 + x - 2)^2} = \frac{-x(x-4)}{(x^2 + x - 2)^2}$$

$$\text{Είναι } f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-x(x-4)}{(x^2 + x - 2)^2} = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \text{ή} \quad x = 4$$

Τα πρόσημα της f' η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον διπλανό πίνακα

x	$-\infty$	-2	0	1	4	$+\infty$
$f'(x)$	-		- 0 +		+ 0 -	
$f(x)$	$\searrow$	$\swarrow$	$\boxed{1}$ τε	$\nearrow$	$\boxed{\frac{1}{9}}$ τμ	$\searrow$

Άρα η f έχει

τοπικό ελάχιστο στο $x_1 = 0$ ίσο με $f(0) = 1$

τοπικό μέγιστο στο $x_2 = 4$ ίσο με $f(4) = \frac{1}{9}$

25.2 7)

$$\Delta=1+8=9, \quad x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{9}}{2}=\frac{1\pm3}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1=\frac{1+3}{2}=2 \\ x_2=\frac{1-3}{2}=-1 \end{cases}$$

$$\text{Είναι } x^2 - x - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2 \quad \text{ή} \quad x = -1$$

Επομένως η f έχει πεδίο ορισμού το $(-\infty, -1) \cup (-1, 2) \cup (2, +\infty)$. Είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty, -1) \cup (-1, 2) \cup (2, +\infty)$, ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με

$$f'(x) = \frac{2x(x^2 - x - 2) - x^2(2x-1)}{(x^2 - x - 2)^2} = \frac{\cancel{2x^3} - 2x^2 - 4x - \cancel{2x^3} + x^2}{(x^2 - x - 2)^2} = \frac{-x^2 - 4x}{(x^2 - x - 2)^2}$$

$$= \frac{-x(x+4)}{(x^2 - x - 2)^2}$$

$$\text{Είναι } f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-x(x+4)}{(x^2 - x - 2)^2} = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \text{ή} \quad x = -4$$

Τα πρόσημα της f' η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον διπλανό πίνακα

x	$-\infty$	-4	-1	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+		+ 0 -	
$f(x)$	$\searrow$	$\boxed{\frac{8}{9}}$ τε	$\nearrow$	$\boxed{0}$ τμ	$\searrow$	$\searrow$

Άρα η f έχει

τοπικό ελάχιστο στο $x_1 = -4$ ίσο με $f(-4) = \frac{1}{9}$

τοπικό μέγιστο στο $x_2 = 0$ ίσο με $f(0) = 0$