

Γ ΛΥΚΕΙΟΥ ΜΕΡΟΣ Β

25.18 1)

Έστω $x > 0$, ο ένας αριθμός και $y > 0$ ο άλλος. Τότε $x \cdot y = 25 \xRightarrow{x>0 \Rightarrow x \neq 0} y = \frac{25}{x}$

Το άθροισμα των δύο αριθμών θα είναι $f(x) = x + \frac{25}{x} = \frac{x^2 + 25}{x}$, $x \in (0, +\infty)$

Η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = \frac{2x^2 - (x^2 + 25)}{x^2} = \frac{x^2 - 25}{x^2}$, για κάθε $x > 0$

Η $f'(x)$ μηδενίζεται στο $x_0 = 5$ και $f(5) = 10$

Από τον διπλανό πίνακα προκύπτει ότι η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο ίσο με 10. Επομένως και το ελάχιστο άθροισμα των δύο αριθμών είναι 10

x	0	5	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 +	
$f(x)$		10	

ολικό ελάχιστο

25.18 2)

Έστω $x > 0$, ο ένας αριθμός και $y > 0$ ο άλλος. Τότε $x \cdot y = 49 \xRightarrow{x>0 \Rightarrow x \neq 0} y = \frac{49}{x}$

Οπότε το άθροισμα των δύο αριθμών θα είναι

$$f(x) = x + \frac{49}{x} \Rightarrow f(x) = \frac{x^2 + 49}{x}, x \in (0, +\infty)$$

Μένει τώρα να δούμε που παρουσιάζει ολικό ελάχιστο η f

Η f ως ρητή είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με

$$f'(x) = \frac{2x^2 - (x^2 + 49)}{x^2} = \frac{2x^2 - x^2 - 49}{x^2} = \frac{x^2 - 49}{x^2} = \frac{(x+7)(x-7)}{x^2} \text{ για κάθε } x > 0$$

Έτσι η f' μηδενίζεται στο $x_0 = 7$ με $f(7) = \frac{7^2 + 49}{7} = 14$

Τα πρόσημα της f' (επηρεάζονται μόνο από το $x - 7$), η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα μονοτονίας

x	$-\infty$	0	7	$+\infty$
$f'(x)$			- 0 +	
$f(x)$			14	

Από τον παραπάνω πίνακα προκύπτει ότι η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0 = 7$ ίσο με 14

Επομένως και το ελάχιστο άθροισμα των δύο αριθμών είναι 14

25.18 3)

Έστω $x > 0$, ο ένας αριθμός και $y > 0$ ο άλλος. Τότε $x \cdot y = 121 \xRightarrow{x>0 \Rightarrow x \neq 0} y = \frac{121}{x}$

Οπότε το άθροισμα των δύο αριθμών θα είναι

$$f(x) = x + \frac{121}{x} \Rightarrow f(x) = \frac{x^2 + 121}{x}, x \in (0, +\infty)$$

Μένει τώρα να δούμε που παρουσιάζει ολικό ελάχιστο η f

Η f ως ρητή είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με

$$f'(x) = \frac{2x^2 - (x^2 + 121)}{x^2} = \frac{2x^2 - x^2 - 121}{x^2} = \frac{x^2 - 121}{x^2} = \frac{(x+11)(x-11)}{x^2} \text{ για κάθε } x > 0$$

Έτσι η f' μηδενίζεται στο $x_0 = 11$ με $f(11) = \frac{11^2 + 121}{11} = 22$

Τα πρόσημα της f' (επηρεάζονται μόνο από το $x - 11$), η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα μονοτονίας

x	$-\infty$	0	11	$+\infty$
$f'(x)$			$-$	$+$
$f(x)$			$\searrow$	$\nearrow$

Από τον παραπάνω πίνακα προκύπτει ότι η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0 = 11$ ίσο με 121

Επομένως και το ελάχιστο άθροισμα των δύο αριθμών είναι 121

25.18 4)

Έστω $x > 0$, ο ένας αριθμός και $y > 0$ ο άλλος. Τότε $x \cdot y = \kappa^2 \xRightarrow{x>0 \Rightarrow x \neq 0} y = \frac{\kappa^2}{x}$

Οπότε το άθροισμα των δύο αριθμών θα είναι

$$f(x) = x + \frac{\kappa^2}{x} \Rightarrow f(x) = \frac{x^2 + \kappa^2}{x}, x \in (0, +\infty)$$

Μένει τώρα να δούμε που παρουσιάζει ολικό ελάχιστο η f

Η f ως ρητή είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με

$$f'(x) = \frac{2x^2 - (x^2 + \kappa^2)}{x^2} = \frac{2x^2 - x^2 - \kappa^2}{x^2} = \frac{x^2 - \kappa^2}{x^2} = \frac{(x+\kappa)(x-\kappa)}{x^2} \text{ για κάθε } x > 0$$

Έτσι η f' μηδενίζεται στο $x_0 = \kappa$ με $f(\kappa) = \frac{\kappa^2 + \kappa^2}{\kappa} = 2\kappa$

Τα πρόσημα της f' (επηρεάζονται μόνο από το $x - \kappa$), η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα μονοτονίας

x	$-\infty$	0	κ	$+\infty$
$f'(x)$			$-$	$+$
$f(x)$			$\searrow$	$\nearrow$

Από τον παραπάνω πίνακα προκύπτει ότι η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0 = \kappa$ ίσο με 2κ

Επομένως και το ελάχιστο άθροισμα των δύο αριθμών είναι 2κ

25.18 5)

Είναι $x \cdot y = 1 \xRightarrow{x>0 \Rightarrow x \neq 0} y = \frac{1}{x}$

Οπότε η παράσταση $x + y$ θα είναι

$$x + y = x + \frac{1}{x} = \frac{x^2 + 1}{x}, \quad x \in (0, +\infty)$$

Οπότε αρκεί να δούμε που παρουσιάζει ολικό ελάχιστο η συνάρτηση f με

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}, \quad x \in (0, +\infty)$$

Η f ως ρητή είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με

$$f'(x) = \frac{2x^2 - (x^2 + 1)}{x^2} = \frac{2x^2 - x^2 - 1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2} = \frac{(x+1)(x-1)}{x^2} \quad \text{για κάθε } x > 0$$

Έτσι η f' μηδενίζεται στο $x_0 = 1$ με $f(1) = \frac{1^2 + 1^2}{1} = 2$

Τα πρόσημα της f' (επηρεάζονται μόνο από το $x - 1$), η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα μονοτονίας

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$			-	+
$f(x)$			$\swarrow$ 2 $\searrow$	

Από τον παραπάνω πίνακα προκύπτει ότι η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0 = 1$ ίσο με 2

Επομένως και η ελάχιστη τιμή της παράστασης $x + y$ είναι 2