

25.12 1)

Έχουμε ισοδύναμα $x \leq e^{\frac{x^2-1}{2}} \Leftrightarrow \frac{x}{e^{\frac{x^2-1}{2}}} \leq 1$

Οπότε θεωρούμε την συνάρτηση f με $f(x) = \frac{x}{e^{\frac{x^2-1}{2}}}$, $x \in \mathbb{R}$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με

$$f'(x) = \frac{e^{\frac{x^2-1}{2}} - x e^{\frac{x^2-1}{2}} \cdot \frac{x}{e^{\frac{x^2-1}{2}}}}{e^{x^2-1}} = \frac{e^{\frac{x^2-1}{2}} (1-x^2)}{e^{x^2-1}} = \frac{e^{\frac{x^2-1}{2}} (1-x)(1+x)}{e^{x^2-1}}$$

Οπότε η f' μηδενίζεται στο $x_1 = -1$ και στο $x_2 = 1$ με $f(-1) = -1$ και $f(1) = 1$

Ακόμη $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^{\frac{x^2-1}{2}}} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\frac{x}{e^{\frac{x^2-1}{2}}}} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^{\frac{x^2-1}{2}}}} = \frac{1}{(-\infty)(+\infty)} = 0$

και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^{\frac{x^2-1}{2}}} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{x}{e^{\frac{x^2-1}{2}}}} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^{\frac{x^2-1}{2}}}} = \frac{1}{(+\infty)(+\infty)} = 0$

Τα πρόσημα της f' , η μονοτονία, τα ακρότατα και τα όρια της f στα άκρα του πεδίου ορισμού της φαίνονται στον διπλανό πίνακα

Άρα η f έχει ολικό μέγιστο ίσο με 1
Οπότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι

$$f(x) \leq 1 \Rightarrow \frac{x}{e^{\frac{x^2-1}{2}}} \leq 1 \Rightarrow x \leq e^{\frac{x^2-1}{2}}$$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	0	-1	1	0	

ολικό μέγιστο

25.12 2)

Έχουμε ισοδύναμα $x^2 \leq 4e^{x-2} \Leftrightarrow \frac{x^2}{e^{x-2}} \leq 4$

Οπότε θεωρούμε την συνάρτηση f με $f(x) = \frac{x^2}{e^{x-2}}$, $x \in (0, +\infty)$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με

$$f'(x) = \frac{2xe^{x-2} - x^2 e^{x-2}}{(e^{x-2})^2} = \frac{2xe^{x-2} (2-x)}{e^{2x-4}}$$

Επειδή $x > 0$ η f' μηδενίζεται στο $x_0 = 2$ με $f(2) = \frac{2^2}{e^{2-2}} = 4$

Τα πρόσημα της f' , η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον διπλανό πίνακα
Άρα η f έχει ολικό μέγιστο ίσο με 4
Οπότε για κάθε $x > 0$ είναι

$$f(x) \leq 4 \Rightarrow \frac{x^2}{e^{x-2}} \leq 4 \Rightarrow x^2 \leq 4e^{x-2}$$

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
$f'(x)$			+	0	-
$f(x)$				4	

ολικό μέγιστο

25.12 3)

Θεωρούμε την συνάρτηση f με $f(x) = \frac{e^x}{x^e}$, $x \in (0, +\infty)$

Η f στο $(0, +\infty)$ είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με

$$f'(x) = \frac{e^x x^e - e^x e x^{e-1}}{(x^e)^2} = \frac{e^x x^{e-1}(x - e)}{x^{2e}}$$

Η f' μηδενίζεται στο $x_0 = e$ με $f(e) = \frac{e^e}{e^e} = 1$

Τα πρόσημα της f' , η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα μονοτονίας

x	$-\infty$	0	e	$+\infty$
$f'(x)$			-	+
$f(x)$				

Έτσι

για κάθε $0 < x \leq e \xRightarrow{f \searrow} f(x) \geq f(e) \Rightarrow f(x) \geq 1$

για κάθε $x \geq e \xRightarrow{f \nearrow} f(x) \geq f(e) \Rightarrow f(x) \geq 1$

Άρα για κάθε $x > 0$ είναι $f(x) \geq 1 \Rightarrow \frac{e^x}{x^e} \geq 1 \Rightarrow e^x \geq x^e$

25.12 4)

Έχουμε ισοδύναμα $e \ln^2 x \leq 4x \Leftrightarrow \frac{\ln^2 x}{x} \leq \frac{4}{e}$

Οπότε θεωρούμε την συνάρτηση f με $f(x) = \frac{\ln^2 x}{x}$, $x \in (1, +\infty)$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(1, +\infty)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με

$$f'(x) = \frac{2 \ln x \cdot \frac{1}{x} - \ln^2 x}{x^2} = \frac{\ln x (2 - \ln x)}{x^2}$$

Είναι $f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{\ln x (2 - \ln x)}{x^2} = 0 \xRightarrow{x > 1 \Rightarrow \ln x \neq 0} 2 - \ln x = 0 \Rightarrow \ln x = 2 \Rightarrow x = e^2$

Οπότε η f' μηδενίζεται στο $x_0 = e^2$ με $f(e^2) = \frac{\ln^2 e^2}{e^2} = \frac{4}{e}$

Τα πρόσημα της f' , η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον διπλανό πίνακα

Άρα η f έχει ολικό μέγιστο ίσο με $\frac{4}{e}$

Οπότε για κάθε $x > 1$ είναι

$$f(x) \leq \frac{4}{e} \Rightarrow \frac{\ln^2 x}{x} \leq \frac{4}{e} \Rightarrow e \ln^2 x \leq 4x$$

x	$-\infty$	1	e^2	$+\infty$	
$f'(x)$			+	0	-
$f(x)$			$\frac{4}{e}$ ολικό μέγιστο		

25.12 5)

Έχουμε ισοδύναμα $e^2 \ln^2 x \leq x^2 \Leftrightarrow \frac{\ln^2 x}{x^2} \leq \frac{1}{e^2}$

Οπότε θεωρούμε την συνάρτηση f με $f(x) = \frac{\ln^2 x}{x^2}$, $x \in (1, +\infty)$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(1, +\infty)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με

$$f'(x) = \frac{2 \ln x \cdot \frac{1}{x} \cdot x^2 - 2x \ln^2 x}{x^2} = \frac{2x \ln x - 2x \ln^2 x}{x^2} = \frac{2x \ln x (1 - \ln x)}{x^2}$$

$$\text{Είναι } f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{2x \ln x (1 - \ln x)}{x^2} = 0 \stackrel{x>1 \Rightarrow x \neq 0, \ln x \neq 0}{\Rightarrow} 1 - \ln x = 0 \Rightarrow \ln x = 1 \Rightarrow x = e$$

$$\text{Οπότε η } f' \text{ μηδενίζεται στο } x_0 = e^2 \text{ με } f(e) = \frac{\ln^2 e}{e^2} = \frac{1}{e^2}$$

Τα πρόσημα της f' , η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον διπλανό πίνακα

Άρα η f έχει ολικό μέγιστο ίσο με $\frac{1}{e^2}$

Οπότε για κάθε $x > 1$ είναι

$$f(x) \leq \frac{1}{e^2} \Rightarrow \frac{\ln^2 x}{x^2} \leq \frac{1}{e^2} \Rightarrow e^2 \ln^2 x \leq x^2$$

x	$-\infty$	1	e	$+\infty$	
$f'(x)$			+	0	-
$f(x)$				$\frac{1}{e^2}$	

ολικό
μέγιστο

25.12 6)

$$\text{Έχουμε ισοδύναμα } x^2 + x + 1 \leq 3e^{x-1} \stackrel{x^2+x+1: \Delta=-3<0 \Rightarrow x^2+x+1>0}{\Leftrightarrow} \frac{1}{3} \leq \frac{e^{x-1}}{x^2 + x + 1}$$

$$\text{Οπότε θεωρούμε την συνάρτηση } f \text{ με } f(x) = \frac{e^{x-1}}{x^2 + x + 1}, x \in (0, +\infty)$$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με

$$f'(x) = \frac{e^{x-1}(x^2 + x + 1) - e^{x-1}(2x + 1)}{(x^2 + x + 1)^2} = \frac{e^{x-1}(x^2 + x + 1 - 2x - 1)}{(x^2 + x + 1)^2} = \frac{e^{x-1}(x^2 - x)}{(x^2 + x + 1)^2} = \frac{e^{x-1}x(x-1)}{(x^2 + x + 1)^2}$$

$$\text{Είναι } f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{e^{x-1}x(x-1)}{(x^2 + x + 1)^2} = 0 \stackrel{x>0}{\Rightarrow} x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$\text{Οπότε η } f' \text{ μηδενίζεται στο } x_0 = 1 \text{ με } f(1) = \frac{e^{1-1}}{1^2 + 1 + 1} \Rightarrow f(1) = \frac{1}{3}$$

Τα πρόσημα της f' , η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον διπλανό πίνακα

Άρα η f έχει ολικό ελάχιστο ίσο με $\frac{1}{3}$

Οπότε για κάθε $x > 0$ είναι

$$f(x) \geq \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{e^{x-1}}{x^2 + x + 1} \geq \frac{1}{3} \Rightarrow 3e^{x-1} \geq x^2 + x + 1$$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$			- 0 +	
$f(x)$				



ολικό
ελάχιστο

25.12 7)

$$\text{Έχουμε ισοδύναμα } x^2 + 2x - 7 \geq -4e^{1-x} \Leftrightarrow \frac{x^2 + 2x - 7}{e^{1-x}} \geq -4$$

$$\text{Οπότε θεωρούμε την συνάρτηση } f \text{ με } f(x) = \frac{x^2 + 2x - 7}{e^{1-x}}, x \in \mathbb{R}$$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με

$$f'(x) = \frac{(2x + 2)e^{1-x} - e^{1-x}(-1)(x^2 + 2x - 7)}{(e^{1-x})^2} = \frac{(2x + 2 + x^2 + 2x - 7)e^{1-x}}{(e^{1-x})^2} =$$

$$\Delta = 16 + 20 = 36, \quad x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{36}}{2 \cdot 1} = \frac{-4 \pm 6}{2} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = \frac{-4-6}{2} = -5 \\ x_2 = \frac{-4+6}{2} = 1 \end{matrix}$$

$$= \frac{e^{1-x} (x^2 + 4x - 5)}{(e^{1-x})^2} = \frac{(x+5)(x-1)}{e^{1-x}}$$

$$\text{Είναι } f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{(x+5)(x-1)}{e^{1-x}} = 0 \Rightarrow (x+5)(x-1) = 0 \Rightarrow x = -5 \text{ ή } x = 1$$

Οπότε η f' μηδενίζεται στο $x_1 = -1$ και στο $x_2 = 3$

$$\text{με } f(-5) = \frac{(-5)^2 + 2(-5) - 7}{e^{1-(-5)}} = \frac{8}{e^6}$$

$$\text{και } f(1) = \frac{1^2 + 2 \cdot 1 - 7}{e^{1-1}} = \frac{1 + 2 - 7}{1} = -4$$

Τα πρόσημα της f' , η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον διπλανό πίνακα

Άρα η f έχει ολικό ελάχιστο ίσο με -4

Οπότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι

$$f(x) \geq -4 \Rightarrow \frac{x^2 + 2x - 7}{e^{1-x}} \geq -4 \Rightarrow x^2 + 2x - 7 \geq -4e^{1-x}$$

x	$-\infty$	-5		1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$		$\frac{8}{e^6}$		-4	$+\infty$

ολικό
ελάχιστο