

Γ ΛΥΚΕΙΟΥ ΜΕΡΟΣ Β

25.10 1)

Θεωρούμε την συνάρτηση f με $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x - 2$

Η f ως πολυωνυμική, έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό με

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x^2 - 2x - 3) \stackrel{\Delta=16, x_1=3, x_2=-1}{=} x = -1 \text{ ή } x = 3$$

Η f' μηδενίζεται στο $x_1 = -1$ και στο $x_2 = 3$ με

$$f(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 - 9(-1) - 2 = 3 \text{ και } f(3) = 3^3 - 3 \cdot 3^2 - 9 \cdot 3 - 2 = -29$$

$$\text{Ακόμη } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3) = -\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3) = +\infty$$

Τα πρόσημα της f' , η μονοτονία, τα ακρότατα και τα όρια της f στα άκρα του πεδίου ορισμού της φαίνονται στον διπλανό πίνακα

x	$-\infty$	-1		3	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$	3		-29	$+\infty$

Οπότε

$$\text{στο διάστημα } A_1 = (-\infty, -1] \text{ είναι } f \nearrow \Rightarrow f(A_1) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), f(-1) \right] = (-\infty, 3]$$

$$\text{στο διάστημα } A_2 = [-1, 3] \text{ είναι } f \searrow \Rightarrow f(A_2) = [f(3), f(-1)] = [-29, 3]$$

$$\text{στο διάστημα } A_3 = [3, +\infty) \text{ είναι } f \nearrow \Rightarrow f(A_3) = \left[f(3), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = [-29, +\infty)$$

α) Παρατηρούμε ότι το 0 περιέχεται στα διαστήματα $f(A_1)$, $f(A_2)$ και $f(A_3)$ και επειδή η f είναι γνησίως μονότονη σε καθένα από τα διαστήματα A_1 , A_2 και A_3 συμπεραίνουμε ότι η f , άρα και η εξίσωση $x^3 - 3x^2 + 1 = 0$ έχει ακριβώς τρεις ρίζες στο $\mathbb{R}$

β) Η ρίζα που έχει η f στο $(-\infty, -1)$ προφανώς είναι αρνητική

Η ρίζα που έχει στο $(3, +\infty)$ προφανώς είναι θετική

Τέλος είναι $f(0) = -2$ οπότε η ρίζα που έχει η f στο $(-1, 3)$ βρίσκεται στο διάστημα $(-1, 0)$ άρα είναι αρνητική. Επομένως η f έχει μία θετική ρίζα

x	$-\infty$	-1	x_0 0	3	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$	3	-2	-29	$+\infty$

25.10 2)

Θεωρούμε την συνάρτηση f με $f(x) = 4x^3 + 2x^2 + 12x - 6$

Η f ως πολυωνυμική, έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό με

$$f'(x) = 12x^2 + 4x + 12 = 4(3x^2 + x + 3)$$

Είναι $\Delta = 1 - 48 = -47 < 0$ οπότε η f' δεν μηδενίζεται και είναι $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Ακόμη

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (4x^3) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (4x^3) = -\infty$$

Οπότε

α) στο $\mathbb{R}$ η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα με

$$f(\mathbb{R}) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = (-\infty, +\infty)$$

Επομένως η f άρα και η εξίσωση $4x^3 + 2x^2 + 12x - 6 = 0$ έχει μία ακριβώς ρίζα στο $\mathbb{R}$

- β) Είναι $f(0) = -6$ οπότε η ρίζα που έχει η f στο $\mathbb{R}$ βρίσκεται στο διάστημα $(0, +\infty)$ άρα είναι θετική. Επομένως η f έχει μία θετική ρίζα

25.10 3)

Θεωρούμε την συνάρτηση f με $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 12x + 12$

Η f ως πολωνυμική, έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό με $f'(x) = 6x^2 + 6x + 12 = 6(x^2 + x + 2)$

Είναι $\Delta = 1 - 8 = -7 < 0$ οπότε η f' δεν μηδενίζεται και είναι $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Ακόμη

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^3) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^3) = -\infty$$

Οπότε

- α) στο $\mathbb{R}$ η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα με

$$f(\mathbb{R}) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = (-\infty, +\infty)$$

Επομένως η f άρα και η εξίσωση $2x^3 + 3x^2 + 12x + 12 = 0$ έχει μία ακριβώς ρίζα στο $\mathbb{R}$

- β) Είναι $f(0) = 12$ οπότε η ρίζα που έχει η f στο $\mathbb{R}$ βρίσκεται στο διάστημα $(-\infty, 0)$ άρα είναι αρνητική. Επομένως η f δεν έχει μία θετικές ρίζες

25.10 4)

Θεωρούμε την συνάρτηση f με $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 30$

Η f ως πολωνυμική, έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό με

$$x^2 - 3x + 2: \Delta = 9 - 8 = 1, x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm 4}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{2+4}{2} = 3 \\ x_2 = \frac{2-4}{2} = -1 \end{cases}$$

$$f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x^2 - 3x + 2) =$$

$$= 6(x-1)(x-2)$$

Η f' μηδενίζεται στο $x_1 = 1$ και στο $x_2 = 2$ με $f(1) = 2 \cdot 1^3 - 9 \cdot 1^2 + 12 \cdot 1 - 30 = -25$ και

$$f(2) = 2 \cdot 2^3 - 9 \cdot 2^2 + 12 \cdot 2 - 30 = -26$$

Ακόμη

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^3) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^3) = +\infty$$

Τα πρόσημα της f' , η μονοτονία, τα ακρότατα και τα όρια της f στα άκρα του πεδίου ορισμού της φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	+	$\emptyset$	$\emptyset$	+
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$ -25 $\searrow$	$\searrow$ -26 $\nearrow$	$+\infty$

Οπότε

α) στο διάστημα $A_1 = (-\infty, 1]$ η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα με

$$f(A_1) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), f(1) \right] = (-\infty, -25] .$$

Άρα η f δεν έχει ρίζα στο διάστημα $A_1 = (-\infty, 1]$

στο διάστημα $A_2 = [1, 2]$ η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα με

$$f(A_2) = [f(2), f(1)] = [-26, -25] .$$

Άρα η f δεν έχει ρίζα ακριβώς στο διάστημα $A_2 = [1, 2]$

τέλος στο διάστημα $A_3 = [2, +\infty)$ η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα με

$$f(A_3) = \left[f(2), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = [-26, +\infty) .$$

Άρα η f έχει μία ακριβώς ρίζα και στο διάστημα $A_3 = [2, +\infty)$

Επομένως η f άρα και η εξίσωση $2x^3 + 12x = 9x^2 + 30$ έχει μία ακριβώς ρίζα στο $\mathbb{R}$

β) Είναι $f(0) = -6$ οπότε η ρίζα που έχει η f στο $\mathbb{R}$ βρίσκεται στο διάστημα $(0, +\infty)$ άρα είναι θετική. Επομένως η f έχει μία θετική ρίζα

25.10 5)

Θεωρούμε την συνάρτηση f με $f(x) = x^3 - 3x + 2$

Η f ως πολυωνυμική, έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό με

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x-1)(x+1)$$

Η f' μηδενίζεται στο $x_1 = -1$ και στο $x_2 = 1$ με

$$f(-1) = (-1)^3 - 3 \cdot (-1) + 2 = 4 \text{ και}$$

$$f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1 + 2 = 0$$

Ακόμη

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3) = +\infty$$

Τα πρόσημα της f' , η μονοτονία, τα ακρότατα και τα όρια της f στα άκρα του πεδίου ορισμού της φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$	
$f'(x)$		+	0	-	0	+
f(x)	$-\infty$		4		0	$+\infty$

Οπότε

α) στο διάστημα $A_1 = (-\infty, -1]$ η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα με

$$f(A_1) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), f(-1) \right] = (-\infty, 4] .$$

Άρα η f έχει μία ακριβώς ρίζα στο διάστημα $A_1 = (-\infty, -1]$

στο διάστημα $A_2 = [-1, 1]$ η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα με

$$f(A_2) = [f(1), f(-1)] = [0, 4] .$$

Προφανώς η f έχει ρίζα τον αριθμό 1 που είναι και η μοναδική ρίζα της στο διάστημα $A_2 = [-1, 1]$

τέλος στο διάστημα $A_3 = (1, +\infty)$ η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα με

$$f(A_3) = \left[\lim_{x \rightarrow 1} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = (0, +\infty)$$

Άρα η f δεν έχει ρίζα στο διάστημα $A_3 = (2, +\infty)$

Επομένως η f άρα και η εξίσωση $x^3 - 3x + 2 = 0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες στο $\mathbb{R}$

β) Η ρίζα που έχει η f στο $(-\infty, -1)$ προφανώς είναι αρνητική

Ακόμη είναι η δεύτερη ρίζα της f είναι η $x_1 = 1$ που προφανώς είναι θετική .

Επομένως η f έχει μία ακριβώς θετική ρίζα

25.10 6)

Θεωρούμε την συνάρτηση f με $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$

Η f ως πολυωνυμική , έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό με $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$

Η f' μηδενίζεται στο $x_1 = 0$ και στο $x_2 = 2$ με

$$f(0) = 0^3 - 3 \cdot 0^2 + 1 = 1 \text{ και } f(2) = 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 1 = -2$$

$$\text{Ακόμη } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3) = -\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3) = +\infty$$

Τα πρόσημα της f' , η μονοτονία , τα ακρότατα και τα όρια της f στα άκρα του πεδίου ορισμού της φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	0		2	$+\infty$
f'(x)	+	0	-	0	+
f(x)		1		-2	$+\infty$

Οπότε

στο διάστημα $A_1 = (-\infty, 0]$ είναι $f \nearrow \Rightarrow f(A_1) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), f(0) \right] = (-\infty, 1]$

στο διάστημα $A_2 = [0, 2]$ είναι $f \searrow \Rightarrow f(A_2) = [f(2), f(0)] = [-2, 1]$.

στο διάστημα $A_3 = [2, +\infty)$ είναι $f \nearrow \Rightarrow f(A_3) = \left[f(2), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = [-2, +\infty)$

α) Παρατηρούμε ότι το 0 περιέχεται στα διαστήματα $f(A_1)$, $f(A_2)$ και $f(A_3)$ και επειδή η f είναι γνησίως μονότονη σε καθένα από τα διαστήματα A_1 , A_2 και A_3 συμπεραίνουμε ότι η f , άρα και η εξίσωση $x^3 - 3x^2 + 1 = 0$ έχει ακριβώς τρεις ρίζες στο $\mathbb{R}$

β) Η ρίζα που έχει η f στο $(-\infty, 0)$ προφανώς είναι αρνητική

Η ρίζα που έχει στο $(0, 2)$ και στο $(2, +\infty)$ προφανώς είναι θετικές

. Επομένως η f έχει δύο θετικές ρίζες

25.10 7)

Θεωρούμε την συνάρτηση f με $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 6$

Η f ως πολυωνυμική , έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό με

$$x^2 + x - 2: \Delta = 1 + 8 = 9, \quad x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm 3}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1-3}{2} = -1 \\ x_2 = \frac{1+3}{2} = 2 \end{cases}$$

$$f'(x) = 6x^2 + 6x - 12 = 6(x^2 + x - 2) =$$

$$= 6(x-1)(x+2)$$

Η f' μηδενίζεται στο $x_2 = -2$ και στο $x_1 = 1$ με

$$f(-2) = 2 \cdot (-2)^3 + 3 \cdot (-2)^2 - 12 \cdot (-2) + 6 = 26 \text{ και}$$

$$f(1) = 2 \cdot 1^3 + 3 \cdot 1^2 - 12 \cdot 1 + 6 = -1$$

Ακόμη

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^3) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^3) = +\infty$$

Τα πρόσημα της f' , η μονοτονία, τα ακρότατα και τα όρια της f στα άκρα του πεδίου ορισμού της φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	-2		1		$+\infty$	
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\boxed{26}$	$\searrow$	$\boxed{-1}$	$\nearrow$	$+\infty$

Οπότε

α) στο διάστημα $A_1 = (-\infty, -2]$ η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα με

$$f(A_1) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), f(-2) \right] = (-\infty, 26]$$

Άρα η f έχει μία ακριβώς ρίζα στο διάστημα $A_1 = (-\infty, -2]$

στο διάστημα $A_2 = [-2, 1]$ η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα με

$$f(A_2) = [f(1), f(-2)] = [-1, 26]$$

Άρα η f έχει μία ρίζα ακριβώς στο διάστημα $A_2 = [-2, 1]$

τέλος στο διάστημα $A_3 = [1, +\infty)$ η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα με

$$f(A_3) = \left[f(1), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = [-1, +\infty)$$

Άρα η f έχει μία ακριβώς ρίζα και στο διάστημα $A_3 = [1, +\infty)$

Επομένως η f άρα και η εξίσωση $2x^3 + 3x^2 - 12x + 6 = 0$ έχει ακριβώς τρεις ρίζες στο $\mathbb{R}$

β) Η ρίζα που έχει η f στο $(-\infty, -2)$ προφανώς είναι αρνητική

Η ρίζα που έχει στο $(1, +\infty)$ προφανώς είναι θετική

Τέλος είναι $f(0) = 6$ οπότε η ρίζα που έχει η f στο $(-2, 1)$ βρίσκεται στο διάστημα $(0, 1)$ άρα είναι θετική. Επομένως η f έχει δύο θετικές ρίζες

25.10 8)

Θεωρούμε την συνάρτηση f με $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 8$

Η f ως πολυωνυμική, έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό με

$$x^2 + x - 2: \Delta = 1 + 8 = 9, \quad x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm 3}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1-3}{2} = -1 \\ x_2 = \frac{1+3}{2} = 2 \end{cases}$$

$$f'(x) = 6x^2 + 6x - 12 = 6(x^2 + x - 2) =$$

$$= 6(x-1)(x+2)$$

Η f' μηδενίζεται στο $x_2 = -2$ και στο $x_1 = 1$ με

$$f(-2) = 2 \cdot (-2)^3 + 3 \cdot (-2)^2 - 12 \cdot (-2) + 8 = 28 \text{ και}$$

$$f(1) = 2 \cdot 1^3 + 3 \cdot 1^2 - 12 \cdot 1 + 8 = 1$$

Ακόμη

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^3) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^3) = +\infty$$

Τα πρόσημα της f' , η μονοτονία, τα ακρότατα και τα όρια της f στα άκρα του πεδίου ορισμού της φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	-2		1	$+\infty$	
$f'(x)$		+	0	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$		$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$+\infty$
			$\boxed{28}$		$\boxed{1}$	

Οπότε

α) στο διάστημα $A_1 = (-\infty, -2]$ η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα με

$$f(A_1) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), f(-2) \right] = (-\infty, 28]$$

Άρα η f έχει μία ακριβώς ρίζα στο διάστημα $A_1 = (-\infty, -2]$

στο διάστημα $A_2 = [-2, 1]$ η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα με

$$f(A_2) = [f(1), f(-2)] = [1, 28]$$

Άρα η f δεν έχει ρίζα στο διάστημα $A_2 = [-2, 1]$

τέλος στο διάστημα $A_3 = [1, +\infty)$ η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα με

$$f(A_3) = \left[f(1), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = [1, +\infty)$$

Άρα η f δεν έχει ρίζα στο διάστημα $A_3 = [1, +\infty)$

Επομένως η f άρα και η εξίσωση $2x^3 + 3x^2 - 12x + 6 = 0$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο $\mathbb{R}$

β) η ρίζα που έχει η f στο $(-\infty, -2)$ προφανώς είναι αρνητική. Επομένως η f δεν έχει θετικές ρίζες

25.10 9)

Θεωρούμε την συνάρτηση f με $f(x) = -x^4 - x^2 + 5$

Η f ως πολυωνυμική, έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό με

$$f'(x) = -4x^3 - 2x = -2x(2x^2 + 1)$$

Η f' μηδενίζεται στο $x_1 = 0$ με

$$f(0) = -0^4 - 0^2 + 5 = 5$$

Ακόμη

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^4) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^4) = -\infty$$

Τα πρόσημα της f' , η μονοτονία, τα ακρότατα και τα όρια της f στα άκρα του πεδίου ορισμού της φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$\emptyset$	$-$
$f(x)$	$-\infty$	$\boxed{5}$	$-\infty$

Οπότε

α) στο διάστημα $A_1 = (-\infty, 0]$ η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα με

$$f(A_1) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), f(0) \right] = (-\infty, 0] .$$

Άρα η f έχει μία ακριβώς ρίζα στο διάστημα $A_1 = (-\infty, 0]$

στο διάστημα $A_2 = [0, +\infty)$ η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα με

$$f(A_2) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), f(0) \right] = (-\infty, 5]$$

Άρα η f έχει μία ακριβώς ρίζα στο διάστημα $A_2 = [0, +\infty)$

Επομένως η f άρα και η εξίσωση $-x^4 - x^2 + 5 = 0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες στο $\mathbb{R}$

β) Η ρίζα που έχει η f στο $(-\infty, 0)$ προφανώς είναι αρνητική

Η ρίζα που έχει στο $(0, +\infty)$ προφανώς είναι θετική. Επομένως η f έχει μία θετική ρίζα

25.10 10)

Θεωρούμε την συνάρτηση f με $f(x) = x^4 - 4 \ln x$

Η f έχει πεδίο ορισμού το $(0, +\infty)$ και είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f'(x) = 4x^3 - \frac{4}{x} = \frac{4x^4 - 4}{x} = \frac{4(x^4 - 1)}{x} = \frac{4(x^2 - 1)(x^2 + 1)}{x} = \frac{4(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)}{x}$$

Επειδή η f' μηδενίζεται στο $x_1 = 1$ με

$$f(1) = 1^4 - 4 \ln 1 = 4$$

Ακόμη

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^4 - 4 \ln x) = 0 - 4(-\infty) = +\infty$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^4 - 4 \ln x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 \left(1 - \frac{4 \ln x}{x^4} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{4 \ln x}{x^4} \right) \stackrel{\frac{0}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{4}{x^3} \right) \stackrel{\frac{A}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4}{x^3} = 0 \\ &= (+\infty)(1 - 0) = +\infty \end{aligned}$$

Τα πρόσημα της f' , η μονοτονία, τα ακρότατα και τα όρια της f στα άκρα του πεδίου ορισμού της φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$			$\emptyset$	
$f(x)$		$+\infty$	$\boxed{4}$	$+\infty$

Οπότε

α) στο διάστημα $A_1 = (0, 1]$ η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα με

$$f(A_1) = \left[f(0), \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \right) = [4, +\infty)$$

Άρα η f δεν έχει ρίζα στο διάστημα $A_1 = [0, +\infty)$

στο διάστημα $A_2 = [0, +\infty)$ η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα με

$$f(A_2) = \left[f(0), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = [4, +\infty)$$

Άρα η f δεν έχει ρίζα στο διάστημα $A_2 = [0, +\infty)$

Επομένως η f άρα και η εξίσωση $x^4 = 4 \ln x$ δεν έχει ρίζα στο διάστημα $(0, +\infty)$

β) Προφανώς η f δεν έχει θετικές ρίζες

25.10 11)

Θεωρούμε την συνάρτηση f με $f(x) = \ln x - x + 2$

Η f έχει πεδίο ορισμού το $(0, +\infty)$ και είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό ως πράξεις

παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $f'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$

Η f' μηδενίζεται στο $x_1 = 1$ με

$$f(1) = \ln 1 - 1 + 2 = 1$$

Ακόμη

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x - x + 2) = -\infty - 0 + 2 = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x - x + 2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{\ln x}{x} - 1 + \frac{2}{x} \right) \stackrel{\substack{0 \\ \text{DLH}}}{\underset{x \rightarrow +\infty}{\lim}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0 = 0 + \infty \cdot (0 - 1 + 0) = -\infty$$

Τα πρόσημα της f' , η μονοτονία, τα ακρότατα και τα όρια της f στα άκρα του πεδίου ορισμού της φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$			$+$	$-$
$f(x)$			1	

Οπότε

α) στο διάστημα $A_1 = (0, 1]$ η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα με

$$f(A_1) = \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), f(0) \right] = (-\infty, 1]$$

Άρα η f έχει μία ακριβώς ρίζα στο διάστημα $A_1 = (0, 1]$

στο διάστημα $A_2 = [1, +\infty)$ η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα με

$$f(A_2) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), f(1) \right] = (-\infty, 1]$$

Άρα η f έχει μία ακριβώς ρίζα στο διάστημα $A_2 = [1, +\infty)$

Επομένως η f άρα και η εξίσωση $\ln x = x - 2$ έχει ακριβώς δύο ρίζες στο διάστημα $(0, +\infty)$

β) Προφανώς και οι δύο ρίζες της f είναι θετικές

25.10 12)

Θεωρούμε την συνάρτηση f με $f(x) = x^2 - 2 - 2\ln x$

Η f έχει πεδίο ορισμού το $(0, +\infty)$ και είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f'(x) = 2x - \frac{2}{x} = \frac{2x^2 - 2}{x} = \frac{2(x^2 - 1)}{x} = \frac{2(x-1)(x+1)}{x}$$

Η f' μηδενίζεται στο $x_1 = 1$ με

$$f(1) = 1^2 - 2 - 2\ln 1 = -1$$

Ακόμη

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 - 2 - 2\ln x) = 0^2 - 2 - 2(-\infty) = +\infty$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 2 - 2\ln x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(1 - \frac{2}{x^2} - \frac{2\ln x}{x^2} \right) \\ &= +\infty \cdot (1 - 0 - 0) = +\infty \end{aligned}$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\ln x}{x^2} \stackrel{\frac{0}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2}{x}}{2x} \stackrel{\frac{0}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$

Τα πρόσημα της f' , η μονοτονία, τα ακρότατα και τα όρια της f στα άκρα του πεδίου ορισμού της φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$			$-$	$+$
$f(x)$		$+\infty$	-1	$+\infty$

Οπότε

α) στο διάστημα $A_1 = (0, 1]$ η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα με

$$f(A_1) = \left[f(1), \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \right) = [-1, +\infty)$$

Άρα η f έχει μία ακριβώς ρίζα στο διάστημα $A_1 = (0, 1]$

στο διάστημα $A_2 = [1, +\infty)$ η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα με

$$f(A_2) = \left[f(1), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = [-1, +\infty)$$

Άρα η f έχει μία ακριβώς ρίζα και στο διάστημα $A_2 = [1, +\infty)$

Επομένως η f άρα και η εξίσωση $x^2 - 2\ln x = 0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες στο διάστημα $(0, +\infty)$

β) Προφανώς και οι δύο ρίζες της f είναι θετικές

25.10 13)

Θεωρούμε την συνάρτηση f με $f(x) = x \ln x - 2$

Η f έχει πεδίο ορισμού το $(0, +\infty)$ και είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό ως πράξεις

παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $f'(x) = \ln x + \cancel{x} \frac{1}{\cancel{x}} = \ln x + 1$

$$\text{Είναι } f'(x) = 0 \Rightarrow \ln x + 1 = 0 \Rightarrow \ln x = -1 \Rightarrow \ln x = \ln e^{-1} \Rightarrow x = e^{-1}$$

Οπότε η f' μηδενίζεται στο $x_1 = e^{-1}$ με $f(e^{-1}) = e^{-1} \ln e^{-1} - 2 = -e^{-1} - 2$

Ακόμη

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln x - 2) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x - \lim_{x \rightarrow 0^+} 2 = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} - 2 \stackrel{\text{DLH}}{=} \frac{-\infty}{+\infty}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cancel{x}}{\cancel{-\frac{1}{x^2}}} - 2 = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) - 2 = -0 - 2 = -2$$

$$\text{και } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x \ln x - 2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln x - \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 = (+\infty)(+\infty) - 2 = +\infty$$

Τα πρόσημα της f' , η μονοτονία, τα ακρότατα και τα όρια της f στα άκρα του πεδίου ορισμού της φαίνονται στον διπλανό πίνακα

x	$-\infty$	0	e^{-1}	$+\infty$
$f'(x)$			- 0 +	
$f(x)$			-2	$+\infty$

Οπότε

στο διάστημα $A_1 = (0, e^{-1}]$ είναι

$$f \searrow \Rightarrow f(A_1) = [f(e^{-1}), \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)] = [-e^{-1} - 2, -2)$$

στο διάστημα $A_2 = [e^{-1}, +\infty)$ είναι

$$f \nearrow \Rightarrow f(A_2) = [f(e^{-1}), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)] = [-e^{-1} - 2, +\infty)$$

- α)** Παρατηρούμε ότι το 0 δεν περιέχεται στο διάστημα $f(A_1)$ αλλά περιέχεται στο $f(A_2)$ επειδή η f είναι γνησίως μονότονη στο διάστημα A_2 συμπεραίνουμε ότι η f , άρα και η εξίσωση $x \ln x = 2$ έχει ακριβώς μία ρίζα
- β)** Η ρίζα που έχει η f προφανώς είναι θετική. Επομένως η f έχει μία θετική ρίζα

25.10 14)

Θεωρούμε την συνάρτηση f με $f(x) = e^x - x$

Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό ως διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $f'(x) = e^x - 1$

Η f' μηδενίζεται στο $x_1 = 0$ με

$$f(0) = e^0 - 0 = 1$$

Ακόμη

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x - x) = 0 - (-\infty) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x \left(1 - \frac{x}{e^x}\right) \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0 \quad (+\infty)(1-0) = +\infty$$

Τα πρόσημα της f' , η μονοτονία, τα ακρότατα και τα όρια της f στα άκρα του πεδίου ορισμού της φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 +	
$f(x)$	$+\infty$	1	$+\infty$

Οπότε

α) στο διάστημα $A_1 = (-\infty, 0]$ η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα με

$$f(A_1) = \left[f(0), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right) = [0, +\infty)$$

Άρα η f δεν έχει ρίζα στο διάστημα $A_1 = (-\infty, 0]$

στο διάστημα $A_2 = [0, +\infty)$ η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα με

$$f(A_2) = \left[f(0), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = [1, +\infty)$$

Άρα η f δεν έχει ρίζα ούτε στο διάστημα $A_2 = [0, +\infty)$

Επομένως η f άρα και η εξίσωση $e^x = x$ δεν έχει ρίζες στο $\mathbb{R}$

β) Προφανώς η f δεν έχει θετικές ρίζες

25.10 15)

Θεωρούμε την συνάρτηση f με $f(x) = e^x(x^2 - 6x + 9) - 1$

Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f'(x) = e^x(x^2 - 6x + 9) + e^x(2x - 6) = e^x(x^2 - 4x + 3)$$

$$\Delta = 16 - 12 = 4, \quad x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm 2}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{4+2}{2} = 3 \\ x_2 = \frac{4-2}{2} = 1 \end{cases}$$

$$\text{Είναι } f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1 \text{ ή } x = 3$$

Επομένως η f' μηδενίζεται στο $x_1 = 1$ και στο $x_2 = 3$ με

$$f(1) = e^1(1^2 - 6 \cdot 1 + 9) - 1 = 4e - 1 \quad \text{και} \quad f(3) = e^3(3^2 - 6 \cdot 3 + 9) - 1 = -1$$

Ακόμη

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} [e^x(x^2 - 6x + 9) - 1] = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x(x^2 - 6x + 9) - \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 = \\ &= -1 + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 6x + 9}{e^{-x}} \stackrel{\text{DLH}}{=} -1 + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - 6}{-e^{-x}} \stackrel{\text{DLH}}{=} -1 + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{e^{-x}} = -1 + \frac{2}{+\infty} = -1 + 0 = -1 \end{aligned}$$

και

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [e^x(x^2 - 6x + 9) - 1] = (+\infty)(+\infty) - 1 = +\infty$$

Τα πρόσημα της f' , η μονοτονία, τα ακρότατα και τα όρια της f στα άκρα του πεδίου ορισμού της φαίνονται στον διπλανό πίνακα

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	-1	$4e^3-1$	-1	$+\infty$	

Οπότε

$$\text{στο διάστημα } A_1 = (-\infty, 1] \text{ είναι } f \nearrow \Rightarrow f(A_1) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), f(1) \right] = (-1, 4e^3 - 1]$$

$$\text{στο διάστημα } A_2 = [1, 3] \text{ είναι } f \searrow \Rightarrow f(A_2) = [f(3), f(1)] = [-1, 4e^3 - 1]$$

$$\text{στο διάστημα } A_3 = [3, +\infty) \text{ είναι } f \nearrow \Rightarrow f(A_3) = \left[f(3), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = [-1, +\infty)$$

α) Παρατηρούμε ότι το 0 περιέχεται στα διαστήματα $f(A_1)$, $f(A_2)$ και $f(A_3)$ και επειδή η f είναι γνησίως μονότονη σε καθένα από τα διαστήματα A_1 , A_2 και A_3

συμπεραίνουμε ότι η f , άρα και η εξίσωση $e^x(x^2 - 6x + 9) = 1$ έχει ακριβώς τρεις ρίζες στο $\mathbb{R}$

β) Η ρίζα που έχει η f στο $(1,3)$ προφανώς είναι θετική

Η ρίζα που έχει στο $(3, +\infty)$ προφανώς είναι θετική

Τέλος είναι $f(0) = 9 - 1 = 8$ οπότε η ρίζα που έχει η f στο $(-\infty, 1)$ βρίσκεται στο διάστημα $(-\infty, 0)$ άρα είναι αρνητική. Επομένως η f έχει δύο θετικές ρίζες